RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1905.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Nota del Corrispondente G. CASTELNUOVO.

7. Una varietà algebrica, a p dimensioni,

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) = 0, \tag{4}$$

la quale ammetta un gruppo ∞^p, G_p, di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due, può presentare certe particolarità notevoli, che è opportuno esaminare, prima di riprendere la questione che ci ha condotto ad introdurre quella varietà. In questa seconda Nota [1] noi faremo dunque astrazione dalla superficie f, da cui siamo partiti; e della V_p, rappresentata dalla (4), ci basterà ricordare che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, essa possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie

$$u_1(\xi), u_2(\xi), \ldots, u_p(\xi),$$

l'inversione dei quali permette di esprimere le ξ mediante funzioni (abeliane) uniformi delle u_i (n. 5). Ricordiamo inoltre che ogni trasformazione del gruppo G_p è rappresentata dalle congruenze (8) del n. 6, che ora scriveremo sotto la forma

$$u_i(\xi') \equiv u_i(\xi) + h_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{8'}$$

dove le h_i sono costanti, e le ξ, ξ' sono coordinate di due punti corrispondenti.

(1) V. la prima Nota a pag. 545 di questi Rendiconti.

Supponiamo ora che il punto ξ della V_p vari sopra una curva, o superficie, ..., o varietà algebrica a $d < p$ dimensioni, W_d, contenuta nella V_p. Allora $u_i(\xi)$ ci fornirà un integrale semplice di prima specie della W_d. Attribuendo ad i i valori $1, 2, \ldots, p$, otterremo così, in generale, p integrali distinti di W_d. Ma può succedere, per una particolarità di W_d e (come vedremo) di V_p, che, alcuni di quei p integrali conservino valori costanti, mentre il punto ξ descrive W_d, oppure che, tra i p integrali $u_i(\xi)$ considerati sopra W_d, passino delle identità lineari a coefficienti costanti. Le due ultime ipotesi non sono però distinte, giacchè la seconda si riduce alla prima, pur di sostituire, come è lecito, agli integrali $u_i(\xi)$, convenienti combinazioni lineari di quelli. Possiamo dunque supporre, senza restrizioni, nelle dette ipotesi, che, quando il punto ξ percorre la varietà W_d, le funzioni

$$u_1(\xi) \ , \ u_2(u) , \ldots , u_q(\xi) \quad , \quad (q < p) \tag{9}$$

forniscano q integrali distinti di W_d, mentre

$$u_{q+1}(\xi) , u_{q+2}(\xi) , \ldots , u_p(\xi) \tag{10}$$

conservino valori costanti su W_d:

$$u_{q+1}(\xi) \equiv k_{q+1} , \ldots , u_p(\xi) \equiv k_p . \tag{11}$$

Poichè i punti di W_d soddisfanno colle loro coordinate alle (11), sarà intanto $d \leqq q$. Ora io dico che « nelle ipotesi in cui ci troviamo, la W_d è conte- « nuta in una varietà algebrica a q dimensioni, V_q, appartenente a V_p, e « dotata di un gruppo transitivo ∞^q di trasformazioni birazionali in sè, per- « mutabili a due a due ».

Applichiamo infatti alla W_d tutte quelle trasformazioni del gruppo G_p, che mutano *un* punto di W_d in *un* punto di W_d; per ogni scelta di due punti corrispondenti su W_d, si avrà una di queste trasformazioni, sicchè le dette trasformazioni saranno al più ∞^{2d}. Ognuna di esse sarà rappresentata da relazioni del tipo (8'), dove però, tenuto conto delle (11), si dovrà porre:

$$h_{q+1} = \cdots = h_p = 0 ;$$

scriveremo dunque quelle relazioni così:

$$u_i(\xi') - u_i(\xi) \equiv \begin{cases} h_i & (i = 1, 2, \ldots, q) \\ 0 & (i = q+1, \ldots, p). \end{cases} \tag{8''}$$

Ora qui si possono presentare due casi:

1) O la W_d è mutata in sè stessa da tutte le trasformazioni nominate; queste formano dunque un sottogruppo ∞^d del gruppo G_p. La W_d ha, salvo la dimensione, le stesse proprietà della V_p, e possiede quindi d integrali semplici, distinti, di prima specie. Ricordando le ipotesi (9), si con-

clude che $d = q$. In questo caso, la nostra affermazione è senz'altro giustificata.

2) Oppure la W_d è mutata da quelle trasformazioni in infinite varietà algebriche della stessa dimensione, le quali tutte segano la W_d in un punto almeno, e formano con questa una varietà algebrica, a $d_1 > d$ dimensioni, W_{d_1}, contenuta in V_p. Qui si noti che tutti punti della W_{d_1} soddisfanno, colle loro coordinate, alle (11), in virtù delle (8″). Ne viene che la dimensione d_1 non può superare q: sicchè $d < d_1 \leq q$. Si applichi ora a W_{d_1} il ragionamento fatto per W_d. Si vedrà che: o la W_{d_1} è mutata in sè da ∞^{d_1} trasformazioni costituenti un sottogruppo di G_p, ed allora è $d_1 = q$, ed il lemma è dimostrato; oppure W_{d_1} è contenuta in una varietà algebrica a d_2 dimensioni, dove $d_1 < d_2 \leq q$.

È chiaro che, ripetendo un numero finito di volte questo procedimento, si giunge a costruire una varietà algebrica V_q contenente W_d, contenuta in V_p, e dotata di un gruppo ∞^q, G_q, di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due. Per ogni punto di V_q sono verificate le (11), mentre le funzioni (9) forniscono q integrali semplici, distinti, di prima specie, che la V_q possiede.

8. Il gruppo G_q è un sottogruppo *algebrico* del gruppo G_p; anzi la particolarità, che stiamo esaminando, della V_p consiste appunto in ciò, che il gruppo G_p possiede un sottogruppo algebrico.

Ogni punto di V_p, mediante le trasformazioni di G_q, si muta nei punti di una V_q, birazionalmente identica a quella sopra considerata. Di queste V_q ne esistono ∞^{p-q} entro V_p; esse formano un tal sistema, che per ogni punto di V_p ne passa *una*. Ognuna di esse è rappresentata da congruenze del tipo (11), ove le costanti k_i siano scelte convenientemente. Le (9) forniscono poi q integrali semplici, distinti, di prima specie, di ciascuna V_q.

Il gruppo G_p opera *imprimitivamente* sul sistema delle V_q; vale a dire: una trasformazione di G_p o muta ogni V_q in sè stessa (nel qual caso la trasformazione appartiene a G_q), o scambia le V_q tra loro. Il sistema delle ∞^{p-q} V_q, ove si consideri ciascuna V_q come elemento, può dunque riguardarsi come una varietà algebrica, a $p - q$ dimensioni, trasformata in sè da un gruppo di ∞^{p-q} trasformazioni birazionali, permutabili a due a due. Questa varietà possiede dunque $p - q$ integrali semplici, distinti, di prima specie, precisamente gli integrali (10), dove ξ è un punto comunque scelto entro la V_q — *elemento* che si considera.

9. Riprendiamo la varietà V_p, che stiamo esaminando. Essa possiede, come si disse, un sistema di ∞^{p-q} varietà algebriche V_q, di cui ciascuna è trasformata in sè da un sottogruppo G_q di G_p. Ora vedremo che la V_p possiede un secondo sistema costituito da ∞^q varietà algebriche V_{p-q}, le quali sono tutte trasformate in sè da un secondo sottogruppo algebrico G_{p-q} di G_p.

La proprietà enunciata è implicitamente contenuta in un noto teorema dei sigg. Picard e Poincaré sugli integrali riducibili (¹). Ma le considerazioni precedenti ci conducono in modo semplice a ritrovare il teorema stesso, ed a costruire algebricamente il sistema delle V_{p-q}.

1) Si supponga anzitutto che nella V_p esista una varietà algebrica a $p-q$ dimensioni, W_{p-q}, la quale seghi in un sol punto ciascuna delle V_q. Poichè questa W_{p-q} è in corrispondenza birazionale col sistema ∞^{p-q} delle V_q, essa possederà gli stessi $p-q$ integrali di prima specie (10), che spettano a quel sistema. Allora noi possiamo applicare alla W_{p-q} il lemma del n. 7, il quale ci dice che la W_{p-q} è contenuta in una varietà algebrica a $p-q$ dimensioni, V_{p-q}, che è trasformata in sè da un sottogruppo algebrico G_{p-q} del gruppo G_p. Nel caso presente dunque la W_{p-q} stessa è una delle V_{p-q} che andavamo cercando, mentre le altre V_{p-q} si ottengono applicando le trasformazioni di G_{p-q} ai singoli punti di V_p.

2) In generale però, o non esisterà, o non si conoscerà una W_{p-q} secante in un sol punto ciascuna V_q. Ma si potrà sempre costruire in V_p una W_{p-q} algebrica, secante in un numero finito di punti, ad es. in n punti, ogni V_q. Il gruppo delle n intersezioni determina, in ogni V_q, una involuzione g_n^{n-1} (n. 6); questa avrà un certo numero $\nu(=n^{2q})$ di punti n^{upli}, costituenti un gruppo Γ_ν. I gruppi Γ_ν, che così si ottengono nelle ∞^{p-q} V_q, formano una varietà algebrica a $p-q$ dimensioni, V_{p-q}. Ora io dico che questa V_{p-q} è trasformata in sè da un sottogruppo G_{p-q} di G_p.

Giova notare, a tal fine, che, prendendo in tutti i modi possibili n punti in una V_q, si ottengono in questa ∞^q involuzioni g_n^{n-1}, ciascuna delle quali possiede un gruppo Γ_ν di ν punti n^{upli}. Variando poi la V_q nel sistema ∞^{p-q} cui appartiene, si avranno in tutto ∞^p g_n^{n-1} ed altrettanti gruppi Γ_ν. Ora ogni trasformazione di G_p muta una di queste g_n^{n-1} in un'altra g_n^{n-1}, ed il gruppo Γ_ν della prima nel gruppo Γ_ν della seconda. In breve, G_p opera sugli ∞^p gruppi di punti Γ_ν, come sui singoli punti di V_p; salvo che, mentre esiste una sola trasformazione di G_p che muta un punto in sè stesso, esistono invece ν trasformazioni che mutano un Γ_ν in sè stesso.

Possiamo esprimere questo fatto così. Immaginiamo una nuova varietà algebrica V'_p, i cui punti siano in corrispondenza birazionale coi gruppi Γ_ν di V_p; sicchè tra V_p e V'_p passi una corrispondenza $(\nu, 1)$. Ogni trasformazione T di G_p, operante su V_p, ha per corrispondente una trasformazione birazionale T' di V'_p in sè stessa; ma la stessa trasformazione T' di V'_p proviene da ν trasformazioni diverse T di V_p. Le dette trasformazioni T'

(¹) Si veda, ad es., la Memoria del sig. Poincaré dell'American Journal, Bd. 8. In quel teorema si suole parlare di integrali *abeliani* riducibili (cioè relativi ad una curva); ma la dimostrazione si estende anche al caso che stiamo trattando. Cfr. anche una Nota del sig. Painlevé nei Comptes Rendus de l'Acad. d. Sciences, Paris, 30 marzo 1896.

costituiscono anch'esse un gruppo a p parametri, G'_p, il quale si trova in isomorfismo meriedrico col gruppo primitivo G_p. Al sottogruppo G_q di G_p corrisponde un sottogruppo G'_q di G'_p; le trasformazioni di G'_q, applicate ai singoli punti della V'_p, generano, in essa, un sistema ∞^{p-q} di V'_q, le quali corrispondono, nella corrispondenza $(\nu, 1)$, alle ∞^{p-q} V_q di V_p.

Riprendiamo ora la V_{p-q} che avevamo costruito in V_p, e che ne segava ogni V_q in un gruppo di ν punti, Γ_ν. A questa V_{p-q} corrisponderà in V'_p una V'_{p-q}, che segherà *in un solo punto* ogni V'_q. Possiamo dunque applicare a V'_p il ragionamento applicato a V_p nella ipotesi 1). Ricaviamo così che il gruppo G'_p possiede un sottogruppo algebrico G'_{p-q}, il quale trasforma la V'_{p-q} in sè stessa. Ritornando ora alla varietà V_p ed al relativo gruppo G_p, concludiamo che anche G_p possiede un sottogruppo algebrico G_{p-q}, il quale trasforma in sè stessa la V_{p-q} sopra costruita. La stessa conclusione vale per ciascuna delle parti irriducibili componenti V_{p-q}, nella ipotesi che essa si spezzi in parti. Anzi, in questa ipotesi, conviene indicare con V_{p-q} una di quelle parti irriducibili, e con G_{p-q} il relativo gruppo di trasformazioni. Le trasformazioni di G_{p-q}, applicate ai singoli punti di V_p, forniranno poi ∞^q varietà V_{p-q}, tutte birazionalmente identiche, formanti il secondo sistema di imprimitività di V_p.

Siamo ora in grado di raccogliere, in un solo enunciato, i risultati ottenuti in questa seconda Nota:

Entro ad una varietà algebrica V_p, *la quale ammetta un gruppo permutabile* G_p *di trasformazioni birazionali in sè stessa, esista una varietà algebrica* W, *sopra cui i* p *integrali semplici di prima specie, appartenenti alla* V_p, *forniscano solo* $q < p$ *integrali distinti di* W. *Allora nella* V_p *esistono due sistemi algebrici di imprimitività, uno composto di* ∞^{p-q} V_q, *l'altro di* ∞^q V_{p-q}, *sistemi tali, che per un punto generico di* V_p *passa una* V_q *ed una* V_{p-q}, *mentre una* V_q *ed una* V_{p-q} *si segano in un numero finito di punti. Nel tempo stesso, il gruppo* G_p *possiede due sottogruppi algebrici,* G_q, G_{p-q}, *il primo dei quali trasforma ciascuna* V_q *in sè stessa e scambia tra loro le* V_{p-q}, *mentre il secondo trasforma in sè le* V_{p-q} *e scambia tra loro le* V_q. *Si aggiunga che la* W, *di cui parla la ipotesi, è contenuta entro una delle* V_q.

Viceversa, se la V_p possiede le particolarità indicate nella tesi, ogni varietà algebrica W, contenuta in una V_q, si trova nelle condizioni previste dalla ipotesi.

Aggiungerò, sebbene ciò non sia essenziale per il seguito, che, se la V_p si trova nel caso 1) (cioè se $\nu = 1$), si può fissare un sistema di p integrali semplici distinti, di prima specie, della V_p, il quale sia formato da q integrali con $2q$ periodi (relativi ad una V_q), e da $p - q$ integrali con $2(p - q)$ periodi (relativi ad una V_{p-q}). Se invece la V_p si trova nel caso 2) $(\nu > 1)$, la detta scelta di integrali si può fare per la V'_p. Ritornando alla

V_p, si può affermare soltanto che, tra gl' integrali semplici di prima specie di V_p, si possono trovare q integrali distinti, *riducibili* ad integrali con $2q$ periodi, ed altri $p - q$ integrali, distinti tra loro e da quelli, che sono riducibili ad integrali con $2(p - q)$ periodi (1).

Matematica. — *Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti.* Nota del Corrispondente Alfredo Capelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *I proietti di Leucotefrite nei Campi Flegrei.* Nota del Socio Carlo de Stefani.

La presenza di rocce leucitiche nella regione vulcanica dei Campi Flegrei a ponente di Napoli è stata accennata assai raramente, quantunque tali rocce sieno così abbondanti al Somma e componenti esclusive al Vesuvio.

Lo Scacchi ne indicò a S. Maria del Pianto e nel Monte di Procida, cioè nei due estremi opposti della regione Flegrea; il Roth ne trovò nel tufo giallo al Vomero e rispettivamente alla Torre Lupara presso Astroni; il Lacroix in un frammento con le pomici e in un proiettile a Humboldtilite nel Colle dell' Imperatrice pure agli Astroni.

Quale componente molto accessorio è indicata la Leucite da Riva e De Lorenzo nella trachite augitica sia olocristallina, sia ipocristallina degli Astroni.

In realtà solo a nord dell'Averno, nel fondo Maglioni, sulla via di Cuma, in mezzo al tufo pomiceo, e con trachite augitica olocristallina, a due o tre riprese, trovasi una certa quantità di massi grandi al più circa 1 mc., di Leucotefrite, trovata ed accennata primieramente da Abich, Hoffmann, Humboldt, non rivista da Rath e Guiscardi, nuovamente descritta da Kalkowski, poi anche ritrovata da De Lorenzo e da me. Altrove le rocce leucitiche sono soltanto in frammenti sporadici e rari, in proietti o talora in ghiaie; ma

(1) L'aggettivo *riducibile* va inteso nel senso convenuto nella teoria degli integrali abeliani; esso esprime che, ad es., i $2pq$ periodi dei q integrali nominati di V_p sono combinazioni lineari, a coefficienti interi, dei $2q^2$ periodi relativi ai q integrali corrispondenti di V'_p; quei coefficienti non variano al variare dell'integrale che si considera tra i q di V_p, ma varia al variare del ciclo, cui si riferiscono i periodi di quell'integrale. Si veda, ad es., la Memoria del Poincaré sopra citata.

avendole trovate un poco dappertutto, oltre che nei luoghi già indicati, è certo che verranno fatti in seguito nuovi ritrovamenti.

Lo Scacchi a S. Maria del Pianto indicò dei Leucitofiri. Manasse ha descritto alcuni esemplari di Leucotefrite mandatigli da me, raccolti in altre parti, verosimilmente dello stesso vulcano, cioè a S. Maria del Monte con altri proietti trachitici, sopra il tufo giallo e sotto un banco di pomici di trachite augitica, a S. Maria del Cavone in ghiaiette con altre rocce vulcaniche di svariatissima natura, nel tufo grigio sopra le pomici predette.

I proietti di S. Maria al Monte hanno struttura olocristallina, granulare, microlitica, con tendenza talora a struttura fluidale; sono costituiti da microliti geminati talora con estinzioni ondulate di Labradorite acida vicina all'Andesina, Augite verde chiara in parte alterata, Magnetite in parte alterata in Ematite e Limonite, Leucite fresca, isotropa in grani o cristalli con le solite inclusioni. Accessorî sono granuli di Olivina, Apatite e forse Ferro titanato. Fra gl' inclusi è qualche raro cristallo di Labradorite basica. In qualche esemplare è della Sodalite, confermata dal saggio chimico. La percentuale della silice è di 49,08 a 49,34.

La Leucotefrite delle ghiaiette di S. Maria del Cavone ha la stessa costituzione, ma è alquanto più basica, avendo il 46,85 per 100 di silice.

Procedendo verso ponente, nel tufo grigio del Vomero il Roth trovò Leucotefrite fonolitoide grigio-chiara con massa fondamentale di Sanidino e Augite, e inclusi di Magnetite, alquanto Plagioclasio e scarsa Leucite con corona di Augiti.

Nel tufo giallo sopra la *Breccia-Museo* a Camaldoli ho trovato rari frammenti della stessa roccia, compatta, rossastra, con massa fondamentale parzialmente vetrosa, microliti di Sanidino con disposizione fluidale; microliti alquanto più allungati e sovente geminati di Labradorite, e raramente di Anortite; di Magnetite talora alterata in Ematite; di Augite verde. Fra gl' inclusi sono: Olivina accompagnata talora da Magnetite, verde, irregolarmente screpolata, a superficie rugosa, a forte rilievo, a pleocroismo debole; Anortite rara; Leucite assai abbondante in cristalli idiomorfi quasi affatto trasparenti, con inclusioni vetrose e di Apatite disposte a zone periferiche; Augite.

Roth raccolse a ponente della Torre Lupara che è nella parte settentrionale del recinto degli Astroni, entro il tufo grigio, un frammento granuloso costituito da microliti di un Plagioclasio, Leucite, Magnetite e forse Nefelina.

Agli Astroni stessi, a destra del viottolo che venendo dalla Torre d' Ingresso e traversata la strada rotabile va verso il Colle dell' Imperatrice, il Lacroix notò, a contatto con delle pomici, un frammento di Leucotefrite con Leucite, Hauyna, grani di Augite gialla e lunghi cristalli di Augite verde-scura nella zona di contatto.

La Leucotefrite dell'Averno, secondo il Kalkowski manca di massa fondamentale vetrosa, ed è costituita da un Plagioclasio, Augite, Magnetite, Leucite talora in cristalli isolati assai grandi, cosa che non si vede altrove nei Campi Flegrei, raramente Apatite, e secondo Hoffmann anche Olivina.

Nel Monte di Cuma, nel tufo grigio fra la Trachite e le sovrastanti scorie ho trovato, fra altri, frammenti angolosi della Leucotefrite fonolitoide. Ha massa fondamentale scarsamente vetrosa, con abbondanti microliti di Sanidino, semplici o geminati, e poco meno di Anortite con estinzioni di + 22,30 a + 45 sull'allungamento, o di Labradorite. Abbondanti, ma meno assai de' Feldspati, sono microliti di Augite basaltica con estinzione su (010) di 53° e sulle lamine di sfaldatura di 30° a 36°; che per dimensioni passano gradatamente agl'inclusi, aventi i medesimi caratteri: frequente è il piano di geminazione secondo (100); frequenti i geminati secondo (101), più frequenti secondo (122). I cubetti di Magnetite, mancante fra gl'inclusi, sono pari in numero ai microliti di Augite. La Leucite forma gran parte della massa, con duplice generazione, cioè in grani o cristalli isolati o raggruppati, di minime dimensioni, ed in inclusi più grandi.

Nel tufo giallo inferiore alla Punta di Pennata, nel cratere del Porto di Miseno con grandi pezzi di pomici, scorie, trachiti, talora certamente alquanto ruzzolati, ho raccolto pure scarsamente la stessa Leucotefrite fonolitoide, compatta, cerulea, un po' cariata, alquanto alterata, con abbondanti cristallini di Leucite, che sono gli unici inclusi visibili a occhio. La parte vetrosa è scarsissima; tra i microliti è scarso il Sanidino: abbondano invece gli aciculi geminati di Labradorite e di Anortite; vi sono minutissime opaciti di Magnetite, ed aureole di Ematite, più raramente di Limonite. Gl'inclusi sono di Labradorite, zonati, con inclusioni vetrose; qualche cristallo ha estinzioni ad angoli più alti della Labradorite. Vi è poi Biotite rarissima, e manca l'Augite, forse per riassorbimento. La Leucite è in abbondanti e grosse sezioni ottagone o granose, fin di 50 μ, variamente aggruppate, biancastre alquanto opache, o verdastre, talora traversate da fessure compenetrate da idrossido di ferro o da Ematite. La roccia è quasi identica ad esemplari della Punta dell'Inferno nel Monte di Procida.

In quest'ultima località la Leucotefrite fonolitoide è meno rara che altrove. Lo Scacchi l'aveva citata col nome di Leucitofiro; ma il Kalkowski non ne vide traccia. Fa parte della Breccia incoerente a svariatissimi elementi angolosi, ma non senza traccia di ruzzolamento, ravvolti da un tufo scuro, Breccia che sta sopra scorie e tufi grigi e sotto pomici e tufo giallo.

La roccia presenta molte varietà. È per lo più grigia-cenerognola, chiara o cerulea, con inclusi di Pirosseno verde-scuro, e con gruppi di cristalli del diametro fin di 5 mm., di Leucite, bianchi, leggermente cerulei o verdastri, opachi, disposti a rosette, formati attorno a cristalli di Magnetite più o

meno alterata o di Pirosseno. Al microscopio nella massa fondamentale la parte vetrosa è scarsissima o mancante, e vi sono:

1. Plaghette allotriomorfe o cristalli abbondanti, sottili, di rado affatto aciculari, di Sanidino, i più semplici, altri geminati secondo le leggi di Karlsbad o di Manebach, con debolissimi colori d'interferenza, che si estinguono a 0°.

2. Un feltro di più grandi ed alquanto meno abbondanti microliti di Labradorite e talora di Anortite, lunghi 14 a 20 μ, larghi talora almeno 5 μ, talora alquanto più grandi, isolati, idiomorfi, tutti freschi e con abito di Microtino, a struttura polisintetica, però con geminazioni non troppo fittamente ripetute, a lamelle larghe, con colori d'interferenza vivaci. In alcuni esemplari sono sferoliti formati da 5 o 6 o più cristalli di Plagioclasio irregolarmente compenetrati fra loro e raggiati. A volte mancano completamente i microliti di Sanidino e vi sono invece abbondantissimi microliti di Labradorite con estinzione costante di — 22° a — 23°,30 su (010), di 6° a 13° su (001): in tal caso si ha una Leucotefrite basaltoide più vicina a quella del Vesuvio. Gl'inclusi feldspatici in alcuni frammenti mancano; in altri sono rarissimi Sanidino e Plagioclasio; in altri solo Labradorite o anche Anortite.

Alcuni cristalli di Plagioclasio hanno regolare struttura a zone, or più acide or più basiche alla periferia; alcuni sono rotti e coi frammenti spostati ma vicini, o sono soltanto curvi. Vi si nota pure la estinzione ondulata. Contengono microliti di Apatite.

3. L'Augite manca talora completamente; il più spesso manca tra i microliti. Si trovano però talora scarsi ma grossi inclusi di Augite basaltica con c : c a 54° ed estinzione a 46° su (010), screpolata, con più deboli colori d'interferenza presso le fessure, verosimilmente per sottrazione di ossido di ferro.

4. Intrecciati coi precedenti sono cristalli di Orneblenda bruna, oppure vicini all'Orneblenda verde, verdi-scuri, pleocroici, che si estinguono a 6° sulle linee di sfaldatura secondo (110), con inclusioni di Labradorite, Apatite, bolle vetrose più che l'Augite.

5. Rari grossi cristalli di Magnetite contigui all'Augite, o che servono di nucleo alla Leucite, e microliti diffusi, talora accumulati in forme prismatiche come scheletri di Mica, cinti o tutti alterati in Limonite bruna o giallastra che dà il colore alla roccia, e più di rado in Ematite.

6. Leucite bianca che costituisce talora gran parte della massa; in sezione è trasparente, isotropa, con tracce di sfaldatura, idiomorfa, però a contorno per lo più molto irregolare, talora arrotondato. Talora ne sono dei grani allotriomorfi. Per lo più i cristalli sono variamente aggruppati, di rado isolati, sempre molto screpolati da fessure irregolarissime talora empite da ossidi di ferro, e tra una fessura e l'altra occupati da sferette concentriche,

quasi si direbbe a struttua perlitica, certo rispondenti a gradi d'alterazione. Alcune delle fessure sono empite da sottilissimi aggregati, con colori d'interferenza abbastanza vivaci, di Caolino, prodotto d'alterazione. Vi sono minutissime inclusioni di minerale biasse, probabilmente Augite.

7. In alcuni esemplari ho veduto sezioni quadrate, assai poco trasparenti, bianco-rossastre per riflessione, con un orlo abbastanza ampio, e con qualche macchia interna di materia bruna d'idrossido di ferro, e credo sieno di Noseana.

8. La Biotite è rarissima in alcuni esemplari, talora in minutissime lamine ed assai alterata in Limonite; ma altra volta è abbondante ed accompagnata sempre da microliti di Magnetite.

In certi esemplari nei quali l'alterazione per via idrica e forse per azione solfatarica è assai avanzata, il Plagioclasio è accompagnato o sostituito da una materia bianca, poco trasparente, senza tracce di sfaldatura, che a debole ingrandimento potrebbe parere vetro; in ogni cristallo, ridotto a scheletro, le inclusioni e le fessure sono ripiene di questa materia che talora forma pure un nucleo assai nettamente limitato nell'interno di qualche cristallo. Questa materia, a ingrandimenti forti, da 145 diam. in su, si decompone in aggregati ed in rosette iridiscenti, a debole birefrazione, perciò diverse dalla Muscovite e riferibili a Caolino. Si nota dunque in tali esemplari l'alterazione incipiente nei Feldspati calciferi.

Alcuni esemplari meritano particolare menzione. Essi sono compatti, di color cinereo, a minutissime macchie bianche e nere, con appena qualche cristallo, scuro, di Orneblenda (1); pieni di cavità occupate da concrezioni nere di Ematite e Limonite manganesifera, e da cristalli isolati, aggruppati, di Biotite color rame, di Ortose, di Anortite e probabilmente di altri minerali coperti da sottile patina bianca. Al microscopio vedesi la massa fondamentale costituita da microliti di Labradorite, cui si aggiungono abbondanti microliti cubici di Magnetite, talora trasformati o contornati da Ematite, ed altrettanto abbondanti microliti d'una varietà speciale di Augite. Sono microliti semplici, prismatici, perchè compaiono parallelamente al piano di simmetria, con le facce (11$\bar{1}$) terminali, quasi trasparenti, verdi-azzurrognoli, quasi niente pleocroici, con piccolissimo assorbimento e forti colori d'interferenza. L'estinzione, quando si può osservare nei cristalli più grandi e più isolati su (010) è di 38°,44°; ma nel massimo numero dei casi di 46°. Il colore di questi cristalli, dovuto forse a leggero contenuto di Titanio, non vidi altrove nelle rocce Flegree. Gl'inclusi o fenocristalli sono assai raramente di Sanidino, di Biotite rara, alterata sui margini, di Leucite in grossi grani e cristalli allotriomorfi, che costituiscono quasi tutta la massa, di Or-

(1) Il prof. Liberto Fantappiè ha osservato in tali cristallini la seguente combinazione:

(100) (110) (010) (031) (011) ($\bar{1}$21) ($\bar{1}$01).

neblenda bruna, rara. Questa è in cristalli più grandi assai dei microliti augitici, assai pleocroica da c bruno-scuro a b bruno-giallastro, ad a verde-giallastro, con assorbimento molto ragguardevole $c > b > a$. Appartiene alle più antiche secrezioni del magma. Rispondenti alle cavità sono le concrezioni di Ematite già osservate, a luce diretta brune o rossastre, con evidente struttura concrezionare a sottili zone parallele, opache nelle sezioni grosse, di colore rosso, per trasparenza, nelle sezioni più sottili.

La Leucotefrite, in proietti e talora in ghiaie, ad eccezione dell'Averno, trovasi dunque di preferenza nelle estreme zone ad est od ovest dei Campi Flegrei, a S. Maria del Pianto, S. Maria del Cavone, S. Maria dei Monti, indi a M. di Procida, a Miseno, a Cuma. È assai più scarsa nella regione centrale. Stratigraficamente è più abbondante nelle zone inferiori del tufo grigio e nel tufo giallo, anche insieme a proietti di tufo verde, specie inferiormente, il che significa che probabilmente quivi, come al M. Somma, nel sottosuolo più profondo, appartenente ai primi tempi della vulcanicità flegrea, ne esiste qualche colata abbastanza ragguardevole. La tipica Leucotefrite basaltoide (Averno, Torre Lupara, Colle dell'Imperatrice, Sante Marie) prevalente nella regione orientale, è la stessa roccia del Somma e del Vesuvio che sono immediatamente adiacenti. La Leucotefrite fonolitoide (Vomero, Camaldoli, Cuma, Miseno, Monte di Procida) prevalente nella regione occidentale è una roccia più rara, che somiglia a quella del Tavolato e di altri punti del Vulcano Laziale.

Patologia vegetale. — *La Brusca dell'olivo nel territorio di Sassari.* Nota del Corrispondente G. Cuboni.

In occasione del recente Congresso degli Agricoltori in Sardegna, ho avuto l'opportunità di esaminare le malattie crittogamiche che, con intensità veramente grave e allarmante, danneggiano gli olivi in varie plaghe dell'isola.

Riservandomi di esporre in altra occasione i fatti da me osservati, credo opportuno non ritardare a dare notizia di una malattia da me trovata molto diffusa nelle vicinanze di Sassari, malattia che corrisponde perfettamente alla cosidetta *Brusca*, finora conosciuta soltanto in provincia di Lecce e precisamente nella penisola Salentina.

Il nome di *Brusca*, per quanto si sa, è stato usato per la prima volta da Cosimo Moschettini e da Giovanni Presta, due scrittori di cose agrarie nella seconda metà del secolo XVIII, per indicare una malattia dell'olivo che si ritiene identica a quella che negli ultimi quindici anni ha recato danni gravi agli olivi della penisola Salentina, annientando quasi completamente il prodotto.

Sulla natura di questa malattia sono stati pubblicati recentemente diversi lavori dal prof. Comes, da me, dal prof. Brizi. Mentre il Comes attribuisce la malattia al marciume delle radici o alla gommosi delle radici, dei rami e del tronco, prodotta dai repentini sbalzi di temperatura, io ed il prof. Brizi, abbiamo ritenuto che la causa più probabile della malattia fosse lo sviluppo di un fungillo, la *Stictis Panizzei* De Not. che costantemente si riscontra sulle foglie degli olivi colpiti dalla *Brusca*.

La storia di questo fungillo è abbastanza singolare. Raccolto e studiato per la prima volta da De Notaris a S. Remo in Liguria fino dal 1842 e poi raccolto una seconda volta da Caldesi nel 1863 a Spezia, questo fungo non era, per quanto si sa, più stato osservato da alcuno, quando nel 1899 fu riscontrato sopra alcune foglie di olivo provenienti dai dintorni di Lecce, inviate per esame alla R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

Dopo di allora tanto da me quanto dal prof. Brizi il fungo è stato cercato nelle diverse regioni d'Italia ed è stato rinvenuto soltanto nella Liguria nei dintorni di S. Remo, dove già per la prima volta lo aveva scoperto il De Notaris, però sempre raro, allo stato, come si dice, sporadico e, per quanto sembra, senza importanza come causa patogenetica per l'olivo.

A Sassari invece la *Stictis Panizzei* l'ho trovata diffusissima, come ebbi ad osservare a Lecce nel dicembre 1901, quando la *Brusca* infieriva colla massima intensità.

Tutte le foglie cadute a terra, senza eccezione, sono interamente ricoperte dalle minute protuberanze nere formate dagli apoteci del fungo.

La malattia ha spogliato quasi totalmente gli olivi che sembrano diventati alberi a foglia caduca. Anche sulle rare foglie rimaste attaccate ai rami, ho riscontrato copiosissimo il fungo in uno stato più o meno avanzato di sviluppo; soltanto le foglie novelle ne appariscono prive.

L'identità fra la malattia di Sassari e la cosidetta *Brusca* di Lecce appare evidente sia nelle cause, sia negli effetti prodotti.

Dalle notizie fornitemi dal sig. Giuseppe Carta che mi ha gentilmente accompagnato nelle escursioni, questa malattia infierisce da circa dieci anni ed ha quasi totalmente distrutto il prodotto in varie località dei dintorni di Sassari.

Finora la malattia della *Brusca* si supponeva limitata in una piccola zona della Provincia di Lecce; il sapere che esiste altresì intensamente diffusa in Sardegna è un fatto importante che merita di essere segnalato.

Per considerazioni che qui è inutile di esporre io ritengo che la *Stictis Panizzei* diventi infesta agli olivi soltanto quando questi si trovano soggetti a speciali condizioni meteoriche o del terreno, disadatte alla vegetazione della pianta.

Quali sieno precisamente le influenze degli agenti meteorici o delle con-

dizioni del terreno che influiscono sullo sviluppo della *Brusca* non è stato ancora possibile, nè a me nè ad altri di determinare.

Io confido che lo studio comparativo della malattia in due territorî così differenti per l'esposizione, la natura geologica del suolo, ecc., come sono Lecce e Sassari, potrà portare luce nell'importante problema e far avanzare le nostre conoscenze sulla natura di una malattia che giustamente preoccupa gli olivicultori.

Meccanica. — *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche.* Nota del prof. Giuseppe Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella presente Nota dimostro alcuni teoremi generali sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque (in particolare delle membrane elastiche), dai quali emerge una notevole differenza tra le proprietà di queste equazioni e le proprietà delle equazioni analoghe della deformazione dei corpi elastici di forma qualsiasi. Dò ancora l'estensione del concetto di *funzione armonica coniugata* alle equazioni dell'equilibrio delle membrane elastiche.

1. Il prof. Boggio dimostra in una sua recente Nota [1] l'importante teorema che *l'integrazione delle equazioni, dalle quali dipende la ricerca della deformazione di una piastra elastica cilindrica di grossezza qualunque, per date forze agenti sulla superficie laterale della piastra parallelamente alle basi, si può sempre ricondurre alla integrazione della equazione doppia di Laplace nel campo formato dalla sezione retta della piastra, per dati valori della funzione incognita e della sua derivata normale nei punti del contorno di detto campo.* Per altro ho dimostrato, in un lavoro in corso di pubblicazione, che *esiste l'integrale della equazione doppia di Laplace (per dati valori della funzione incognita e della sua derivata normale nei punti del contorno del campo che si considera) per tutti quei campi convessi per i quali o si dimostra il principio di Dirichlet col metodo di Neumann o si conosce la funzione di Green*; quindi *risulta dimostrata l'esistenza degli integrali delle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque, che hanno per sezione retta uno qualunque di detti campi convessi.*

2. Sussiste il seguente teorema reciproco a quello del prof. Boggio: *l'integrazione della equazione doppia di Laplace si può sempre ricondurre alla integrazione delle equazioni delle piastre elastiche cilindriche.*

[1] *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche...* Rendic. della R. Acc. dei Lincei; vol. XIII, 2° sem. 1904.

Sia infatti σ un'area piana, limitata da una linea s; n la normale nei punti di s nella direzione che entra nell'area σ; x, y le coordinate cartesiani ortogonali di un punto qualsiasi del piano di σ; e V l'integrale regolare delle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma) \quad \Delta^2(\Delta^2 V) = 0, \\ \text{(nei punti di } s) \quad V = f_1 \ , \ \dfrac{dV}{dn} = f_2, \end{cases}$$

dove $\Delta^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, e dove ancora f_1, f_2 sono due funzioni arbitrarie dei punti di s, aventi la prima le derivate dei due primi ordini rispetto ad s, la seconda la sola derivata prima rispetto ad s.

Si ha nei punti di s:

$$\frac{df_1}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} \quad , \quad f_2 = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn};$$

per cui sarà:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_2\frac{dy}{ds} - \frac{df_1}{ds}\frac{dy}{dn} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{df_1}{ds}\frac{dx}{dn} - f_2\frac{dx}{ds},$$

e quindi, derivando rispetto ad s e facendo uso delle note formole:

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dn} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn},$$

otteniamo:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right) = \dfrac{d}{ds}\left(f_2\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{df_1}{ds}\dfrac{dy}{dn}\right) = \\ \qquad = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dx}{dn}, \\ \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right) = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{df_1}{ds}\dfrac{dx}{dn} - f_2\dfrac{dx}{ds}\right) = \\ \qquad = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\dfrac{dx}{dn}. \end{cases}$$

Se si pone:

$$(3)\qquad \begin{cases} U = V + b\Delta^2 V \ , \ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = T_{11} \ , \ -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = T_{12} \ , \ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = T_{22}, \end{cases}$$

$$T_{11} + T_{22} = T;$$

$$(3)'\qquad \Phi = \frac{d}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dx}{dn} - f_2\frac{dx}{ds}\right) \quad , \quad \Psi = \frac{d}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dy}{dn} - f_2\frac{dy}{ds}\right),$$

con b coefficiente costante, risulterà, in forza della prima delle (1),

$$T = \Delta^2 U = \Delta^2 V \quad , \quad \Delta^2 T = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - b\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} , \ldots , \ldots ;$$

e quindi:

$$(4)\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma) \begin{cases} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0 , \\ \Delta^2 T = 0 , \end{cases} \\ \text{(nei punti di } s) \begin{cases} \left(T_{11} + b\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(T_{12} + b\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}\right)\dfrac{dy}{dn} = \Phi , \\ \left(T_{12} + b\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(T_{22} + b\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\dfrac{dy}{dn} = \Psi , \end{cases} \end{cases}$$

dove Φ, Ψ soddisfanno alle condizioni:

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_s \Phi\, ds = \int_s \frac{d}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dx}{dn} - f_2\frac{dx}{ds}\right) ds = 0 \quad , \quad \int_s \Psi\, ds = 0 , \\ \displaystyle\int_s (y\Phi - x\Psi)\, ds = \int_s \left\{ y\frac{d}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dx}{dn} - f_2\frac{dx}{ds}\right) - x\frac{d}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dy}{dn} - f_2\frac{dy}{ds}\right)\right\} ds = \\ \displaystyle\qquad = -\int_s \left\{ \frac{dy}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dx}{dn} - f_2\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{df_1}{ds}\frac{dy}{dn} - f_2\frac{dy}{ds}\right)\right\} ds = \\ \displaystyle\qquad = -\int_s \frac{df_1}{ds}\, ds = 0 . \end{cases}$$

Poniamo:

$$b = \frac{a}{1+\varkappa} \quad , \quad a = \frac{\varkappa h^2}{4} ,$$

$$(6)\quad T_{11} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varkappa\frac{\partial\psi}{\partial y} \ , \ T_{12} = \frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \ , \ T_{22} = \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} ,$$

con h costante non negativa qualsiasi e con $\varkappa$ costante qualsiasi diversa da 1 e — 1.

Come si può verificare, le condizioni di integrabilità delle equazioni (6) nelle φ, ψ, sono contenute nelle prime tre delle equazioni (4); quindi, so-

stituendo nelle medesime equazioni (4) le espressioni (6) di T_{11}, T_{12}, T_{22}, avremo:

$$(4)'\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma) \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{1-\varkappa}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{1+\varkappa}{2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 0\,, \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{1-\varkappa}{2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{1+\varkappa}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0 \end{cases} \\ \text{(nei punti di } s) \begin{cases} \left[\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \varkappa\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + a\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^2\,\partial y}\right)\right]\dfrac{dx}{dn} + \\ \quad + \left[\dfrac{1-\varkappa}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right]\dfrac{dy}{dn} = \Phi\,, \\ \left[\dfrac{1-\varkappa}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right]\dfrac{dx}{dn} + \\ \quad + \left[\left(\varkappa\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + a\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)\right]\dfrac{dy}{dn} = \Psi \end{cases} \end{cases}$$

con Φ, Ψ funzioni che soddisfanno alle note condizioni di equilibrio (5). E queste equazioni sono appunto quelle dell'equilibrio di una piastra elastica cilindrica, di cui h è lo spessore e $\varkappa$ la costante di elasticità.

Note adunque le funzioni f_1, f_2, che entrano nelle equazioni (1), ecco come si può procedere per integrare le (1) stesse: *per mezzo delle* (3)′ *si calcolino le espressioni* Φ, Ψ, *si integrino poi le* (4)′, *e in fine, servendosi delle* (6) *e delle* (3), *si calcoli* (*con sole quadrature*) *la funzione* V.

Si può osservare che, quando in un modo qualsiasi si è riusciti a determinare per mezzo delle equazioni (4)′ o (4) la sola (dilatazione) funzione T (operando ad es. secondo è indicato nel noto *metodo del Betti*), si conosceranno della funzione V: i valori di $\Delta^2 V = T$ nei punti di σ e i valori di $V = f_1$, $\dfrac{dV}{dn} = f_2$ nei punti di s; sicchè, ricorrendo alla nota *formola di Green*, potremo determinare con sole quadrature la funzione V in un punto qualsiasi di σ.

3. In virtù del teorema del prof. Boggio, l'integrazione delle equazioni (4)′ per $\varkappa$ ed a costanti qualsiasi ($\varkappa$ diversa da 1 e -1) equivale sempre, a meno di quadrature, all'integrazione delle equazioni (1); per altro l'integrazione delle equazioni (1), in virtù del teorema del § precedente, equivale sempre alla integrazione delle equazioni (4)′ per $\varkappa$ ed a costanti qualsiasi ($\varkappa$ diversa da 1 e -1); quindi si avrà che, *integrate in un modo qualsiasi le equazioni* (4)′ *per un particolare valore di a e per un particolare valore di* $\varkappa$ (*diverso da* 1 *e* -1), *si possono sempre determinare con sole quadrature gli integrali delle medesime equazioni* (4)′ *per qualsiasi altro valore di a e per qualsiasi altro valore di* $\varkappa$ (*diverso da* 1 *e* -1).

Se rammentiamo poi che, nota la funzione T, corrispondente a due date funzioni dei punti di s: Φ, Ψ, l'integrazione delle equazioni (1) è ricondotta alle quadrature, avremo ancora, in virtù del teorema del prof. Boggio, il seguente teorema generale relativo alla integrazione della (4)′: *nota in un modo qualsiasi la funzione* T (*dilatazione*), *corrispondente alle date funzioni* Φ, Ψ *dei punti di* s, *gli integrali* φ, ψ *delle equazioni* (4)′ *per qualsiasi valore di* a (*il caso* $a = 0$ *delle membrane incluso*) *e per qualsiasi valore di* $\varkappa$ (*diverso da* 1 *e* -1) *si possono ottenere con sole quadrature.*

Il teorema analogo per i corpi elastici di forma qualsiasi, come è notorio, non sussiste in generale.

Dalle considerazioni precedenti risulta che *la funzione* T (*dilatazione*) *è indipendente dai valori delle costanti* $a, \varkappa$. Questo si può anche provarle direttamente, osservando che si ha $T = \Delta^2 V$, che la funzione V dipende unicamente dalle funzioni f_1, f_2, e che queste funzioni alla loro volta dipendono solo dalle funzioni Φ, Ψ [cfr. le formole (15), $(15)_1$, (16) della Nota del prof. Boggio].

4. I sigg. Cosserat [1] hanno dimostrato, almeno per il caso della sfera, il seguente teorema: *gli integrali delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, per date tensioni in superficie, sono funzioni analitiche uniformi del parametro* $\varkappa$, *le quali hanno una serie infinita di poli del primo ordine in un gruppo semplicemente infinito di punti dell'asse reale della variabile* $\varkappa$. *Per ciascun valore di* $\varkappa$, *corrispondente ai punti di questo gruppo, esistono integrali regolari delle equazioni dell'equilibrio elastico (soluzioni eccezionali), di cui le componenti di deformazione sono generalmente diverse dallo zero, mentre le componenti delle tensioni in superficie sono nulle.*

Questo teorema non sussiste più nel caso delle membrane elastiche e delle piastre elastiche; giacchè *gli integrali delle equazioni* (4)′ *sono funzioni regolari del parametro* $\varkappa$ (*i valori* $\varkappa = 1, -1$ *esclusi, che sono singolari per le equazioni* (4)′ *stesse*) *e del parametro* a. Infatti rammentiamo anzitutto che la funzione V, come fu osservato alla fine del § precedente, è indipendente dai parametri $\varkappa$ ed a. Osserviamo poi che le funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22}, espresse per mezzo della V, sono lineari nel parametro $b = \frac{a}{1+\varkappa}$ [cfr. le form. (3)]; gli integrali φ, ψ delle(6), espressi per mezzo delle T_{11}, T_{12}, T_{22}, sono [cfr. le form. (17), (18), (19), (20) della Nota del prof. Boggio] funzioni regolari di $\varkappa$ (per $\varkappa$ diverso da 1 e -1); quindi, come si voleva dimostrare, le φ, ψ sono funzioni regolari tanto ri-

[1] *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique...* Comptes rendus, 5 août 1901.

spetto al parametro $\varkappa$ (per $\varkappa$ diverso da 1 e -1), quanto rispetto al parametro a.

Si verifica poi facilmente che, se $\Phi = \Psi = 0$ *in tutti i punti di* s, *gli integrali regolari* T_{11}, T_{12}, T_{22} *delle equazioni* (4) *sono dovunque nulli.*

La ragione della diversità dei risultati precedenti dal risultato dei sigg. Cosserat, sopra enunciato, risiede nel fatto che, mentre nel caso nostro le condizioni di integrabilità delle equazioni (6) rientrano nelle prime tre delle (4), nelle quali non compariscono i parametri $\varkappa$ ed a, invece nel caso dei solidi elastici isotropi le condizioni di integrabilità delle equazioni analoghe alle (6) dànno luogo, oltre che alle equazioni analoghe alle prime tre delle (4), ad altre equazioni indefinite nelle quali comparisce esplicitamente il parametro $\varkappa$.

5. Facciamo $a = 0$ ($h = 0$) nelle equazioni (4)′. Esse divengono allora le equazioni delle membrane elastiche.

Se indichiamo con β una costante qualsiasi, le prime tre delle equazioni (4)′ si possono scrivere:

$$(4)'_1 \quad \text{(nei punti di } \sigma\text{)} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\dfrac{1+\varkappa}{2} - \beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right] + \\ \qquad + \dfrac{1-\varkappa}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\dfrac{1+\varkappa}{2} - \beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \\ \qquad + \dfrac{1-\varkappa}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0. \end{cases}$$

Rimpiazziamo le altre tre delle equazioni (4)′, nelle quali supponiamo di avere già posto $a = 0$, con le equazioni:

$$(4)'_2 \quad \text{(nei punti di } s\text{)} \begin{cases} \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\dfrac{1+\varkappa}{2} - \beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right]\dfrac{dx}{dn} + \\ \qquad + \dfrac{1-\varkappa}{2}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right]\dfrac{dy}{dn} = \Phi, \\ \dfrac{1-\varkappa}{2}\left[\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right]\dfrac{dx}{dn} + \\ \qquad + \left[\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\dfrac{1+\varkappa}{2} - \beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right]\dfrac{dy}{dn} = \Psi, \end{cases}$$

che per $\beta = 1$ coincidono appunto con quelle rimpiazzate.

Se φ, ψ sono integrali delle equazioni indefinite $(4)'_1$, si può porre:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\dfrac{1+\varkappa}{2}-\beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\left(\dfrac{1+\varkappa}{2}-\beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(7)'\qquad \frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad,\quad \frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Allora le $(4)'_2$ divengono:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dx}{dn}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dy}{dn}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{dv}{ds}=\Phi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dy}{dn}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dx}{dn}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}=-\dfrac{du}{ds}=\Psi. \end{cases}$$

Risolviamo le (7), (7)′ rispetto a $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$. Si ha:

$$(7)_1\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}-\left(\dfrac{1+\varkappa}{2}-\beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}}{1-\left(\dfrac{1+\varkappa}{2}-\beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)^2},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}-\left(\dfrac{1+\varkappa}{2}-\beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)\dfrac{\partial v}{\partial y}}{1-\left(\dfrac{1+\varkappa}{2}-\beta\dfrac{1-\varkappa}{2}\right)^2},$$

$$(7)'_1\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{1-\varkappa}{2}(1-\beta^2)},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\beta\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{1-\varkappa}{2}(1-\beta^2)};$$

e quindi, esprimendo le condizioni di integrabilità di queste equazioni nelle φ, ψ ed indicando con k un parametro costante, si trovano per le funzioni u, v le seguenti equazioni:

$$(4)''_1\qquad (\text{nei punti di } \sigma)\begin{cases} \Delta^2 u+k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \\ \Delta^2 v+k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \end{cases}$$

che sono della stessa forma delle $(4)'_1$.

Ciò premesso, ecco come si può procedere nella integrazione delle equazioni $(4)'_1$, $(4)'_2$, nelle quali Φ, Ψ sono funzioni note, che soddisfanno alle solite condizioni di equilibrio. Si determinino (con quadrature) due funzioni v_s, u_s dei punti della linea s, le cui derivate rispetto ad s coincidano rispettivamente con le funzioni Φ, $-\Psi$, e si integrino le equazioni $(4)''_1$ con le

condizioni nei punti di s:

$$(4)_2'' \qquad u = u_s \quad , \quad v = v_s .$$

Esistono certamente (1) per $|k| \leq 1$ gli integrali u, v delle equazioni $(4)_1''$, $(4)_2''$ e questi integrali anche per $k = -1$ soddisfanno nei punti di σ alla equazione:

$$(9) \qquad \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 .$$

Dopo si determinino (con quadrature) gli integrali φ, ψ delle equazioni $(7)_1$, $(7)_1'$, le quali equazioni in virtù delle $(4)_1''$ soddisfano alle condizioni di integrabilità. Queste funzioni φ, ψ sono gli integrali delle equazioni $(4)_1'$, $(4)_2'$. Infatti le φ, ψ sono certamente integrali delle equazioni (7), (7)′ equivalenti alle $(7)_1$, $(7)_1'$; e le equazioni (7), (7)′, considerate come equazioni nelle funzioni u, v, devono soddisfare alle condizioni di integrabilità, che sono rappresentate appunto dalle $(4)_1'$. Inoltre le funzioni u, v soddisfanno nei punti di s alle condizioni (8), e queste, tenuto conto delle $(7)_1$, $(7)_1'$, dànno luogo alle $(4)_2'$.

Le funzioni u, v precedentemente introdotte sono, rispetto alle funzioni φ, ψ, la naturale estensione delle *funzioni armoniche coniugate*.

Nei casi in cui i denominatori ai secondi membri delle $(7)_1$, $(7)_1'$ si annullano, le precedenti considerazioni in generale non sono più valevoli. Ora nel caso appunto di $\beta = 1$ (caso delle membrane elastiche soggette a date tensioni al contorno) i denominatori delle $(7)_1'$ si annullano; però siccome in questo caso si ha $k = -1$, risulterà dalle $(4)_1''$, (9) (2):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 ;$$

e quindi le equazioni (7), (7)′ saranno ancora compatibili, e le funzioni φ, ψ, che possiamo da esse dedurre con quadrature, soddisferanno ancora alle equazioni $(4)_1'$, $(4)_2'$.

Matematica. — *Sulle superficie* W *applicabili sopra superficie di rotazione.* Nota del dott. Arcadio Tagliaferri, presentata dal Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Cfr. mio cit. lavoro, § 19.
(2) Cfr. mio cit. lavoro, § 20.

Fisica. — *Relazione fra la costante dielettrica e la densità dell'aria* [1]. Nota del dott. Augusto Occhialini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Le prime ricerche sopra la costante dielettrica dei gas furono dirette alla verifica della legge di Maxwell. Con questo intendimento il Boltzmann [2] intraprese lo studio di alcuni gas, fra i quali l'aria, trovando una concordanza perfetta fra i valori della costante dielettrica e quelli del quadrato dell'indice di rifrazione. Ayrton e Perry [3] sperimentando con alcuni dei gas studiati dal Boltzmann, trovarono valori non concordanti con la legge di Maxwell, e superiori a quelli dal Boltzmann stesso. Ma questi ultimi ebbero una piena conferma nelle misure ripetute dal Klemencic [4].

Il Lebedew [5] e il Bädeker [6] studiarono la costante dielettrica anche in rapporto alla densità; ma essi limitarono lo studio ai gas liquefatti o ai vapori vicini al punto di ebullizione.

Quindi manca uno studio diretto della costante dielettrica dei gas col variare della densità; io mi sono proposto di iniziare questo studio per pressioni crescenti fino a 200 atmosfere, e in questa Nota dò un cenno delle mie ricerche, riservando una più completa esposizione delle medesime a una pubblicazione che sarà prossimamente fatta sul Nuovo Cimento.

Fino ad ora ho limitato le ricerche all'aria, ma in seguito sperimenterò con altri gas, cercando di studiarne il comportamento allo stato critico e di indagare le possibili relazioni fra la costante dielettrica dei miscugli e dei composti, e quella dei loro componenti.

Descrizione del metodo. — Per le mie misure ho usato un confronto di capacità modificando il metodo del Gordon con una disposizione già adoperata dal Lecher [7]. Ognuno dei due condensatori C, C′ da confrontarsi (fig. 1) ha un'armatura in comunicazione con un polo di un piccolo rocchetto d'induzione I; le altre due armature sono collegate colle due coppie di quadranti di un elettrometro Mascart E, il cui ago è in comunicazione con la terra insieme all'altro polo del rocchetto.

Uno dei condensatori ha per dielettrico quello di cui si vuol misurare il potere induttore; l'altro è nell'aria, e la sua capacità si può variare spo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.
(2) Wien. Ber. 69, 795, 1874.
(3) Asiatic Soc. of Japan, apr. 18, 1877.
(4) Wien. Ber., (2) 91, 1, 1885.
(5) Wied. Ann. 44, 288, 1891.
(6) Zeitschr. f. Phys. Chem. 36, 305, 1901.
(7) Wied. Ann. 42, 149, 1891.

stando una delle armature. Così le variazioni di capacità prodotte nel primo sono compensate e calcolate da quelle del secondo.

In definitiva l'applicazione di questo metodo richiede una *f. e. m.* rapidamente alternata, un condensatore a capacità variabile che chiamerò *di confronto*, e un condensatore di dimensioni fisse immerso nel dielettrico che si studia: sarà designato col nome di *condensatore sperimentale.*

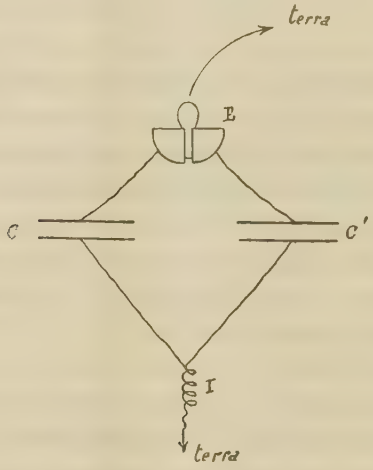


Fig. 1.

Per ottenere una f. e. m. alternata ho usato un alternatore ad alta frequenza, del tipo Lamme (1) che fu costruito dall'ing. Santarelli di Firenze con la più grande accuratezza. Questo alternatore può dare una corrente di 10 ampère a 110 volta con 10000 alternanze per secondo. Nelle mie esperienze ho adoperato una corrente di circa 0,5 ampère con settemila alternanze al secondo, trasformandola convenientemente per mezzo di un piccolo rocchetto d'induzione. L'uso di quest'ottimo apparecchio ha dato alle misure una grande speditezza ed una grande regolarità.

Il condensatore a capacità variabile è costituito da due lastre da specchio lunghe m. 1,50, larghe m. 0,30 argentate, ma non verniciate.

L'argentatura è stata raschiata sui bordi in maniera da lasciarne soltanto una striscia centrale di cm. 10 di larghezza e di m. 1,30 di lunghezza. Una delle lastre è fissata sopra un apposito banco di cui nella figura 2 si vede la sezione trasversale; sugli orli porta tanti pezzi di legno duro della forma della fig. 3. I pezzi distano l'uno dall'altro di m. 0,25 e ognuno di essi è fissato alla lastra dentro il vano a per mezzo di due viti di pressione v, v. Sopra il ripiano b posa l'altra lastra che è perfetta-

(1) Trans. of Am. Inst. of Elect. Eng. 21, 405, 1904.

mente libera di scorrervi sopra; il battente che limita il ripiano impedisce alla lastra ogni movimento laterale.

È chiaro che la distanza fra le due lastre del condensatore è determinata dall'altezza del tratto di legno che sta fra il piano *b* e il vano *a*, e per averla uguale in tutti i sostegni, questi furono costruiti con una piallatrice meccanica sopra uno stesso pezzo di legno e poi segati. La lastra

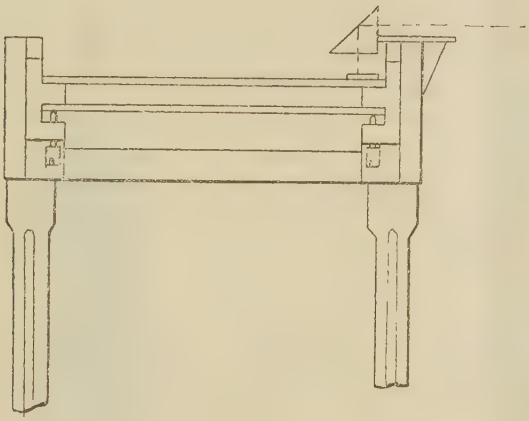


Fig. 2.

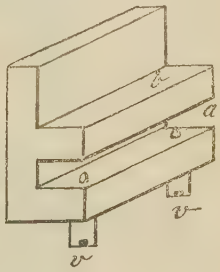


Fig. 3.

mobile è collegata ad una delle estremità con dei morsetti di legno ad una vite che permette di darle spostamenti abbastanza piccoli. Questi sono comunicati dall'esterno, e la posizione della lastra mobile è definita dalla lettura *l* fatta sopra una scala di vetro che scorre con essa, e che si può leggere mediante cannocchiale munito di reticolo attraverso a un prisma a riflessione totale. Il condensatore è chiuso in una custodia di vetro ed è difeso dalle azioni elettrostatiche mediante una rete metallica che avvolge tutta la custodia.

Il condensatore sperimentale è costituito da una serie di dischi sovrapposti; i dischi d'ordine pari infilati sopra una colonna d'ottone formano una delle armature, quelli d'ordine dispari infilati in un'altra colonna, l'altra armatura. A tale scopo ogni disco ha due fori, uno più piccolo, l'altro più grande; il primo serve ad infilarlo nella propria colonna sostegno; il più grande dà passaggio all'altra colonna, che così non è a contatto col disco. Ho fissato le due colonne a una base di vetro, ho interposto fra i dischi di una stessa serie dei cilindretti di ottone infilati nella rispettiva colonna e ho serrato le due serie con un dado all'estremità. Così nessun dielettrico è intervenuto nella costruzione dell'apparecchio.

Compressione dei gas e misura della densità. — La compressione dei gas si effettua dentro un recipiente di acciaio di forma cilindrica del diametro interno di cm. 10 e dell'altezza di 50 cm. (fig. 4). Sul fondo posa

la base del condensatore sperimentale, le armature del quale comunicano con due molle *m* d'ottone fisse alle pareti del recipiente e da queste isolate con un cerchio di ebanite. Il recipiente è chiuso da un tappo nel quale si innesta il tubo di comunicazione con la pompa di compressione.

La comunicazione elettrica con l'esterno si ottiene per mezzo di due fili di ottone isolati con ebanite, che attraversano le pareti del recipiente

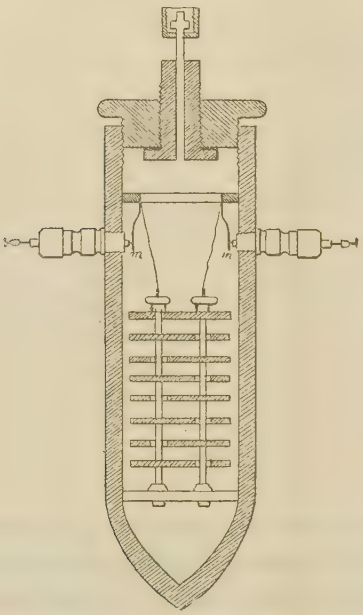


Fig. 4.

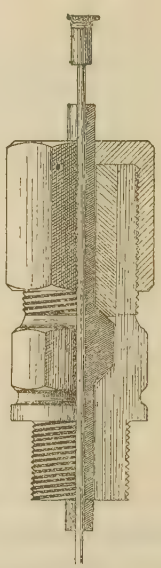


Fig. 5.

e vanno a toccare le molle di comunicazione *m*. La difficoltà consiste nell'ottenere un isolamento rigoroso con una perfetta tenuta a pressioni elevate, e fu superata nel modo seguente: ogni bacchetta di ebanite è forata lungo l'asse per lasciar passare l'anima metallica, e verso la metà della sua lunghezza porta un ingrossamento come indica la fig. 5. Per mezzo di questo ingrossamento la bacchetta di ebanite è serrata dentro la cavità di un pezzo di acciaio per mezzo di un premistoppe. Il pezzo di acciaio è poi avvitato al recipiente con una guarnizione di fibra rossa. Il filo di ottone che attraversa la bacchetta di ebanite è masticiato con ceralacca all'estre mità interna, e questo basta per assicurare la tenuta. I particolari della costruzione sono indicati nella figura.

Per la misura della densità mi sono servito dell'apparecchio usato dal prof. L. Magri nel suo lavoro: *Relazione fra l'indice di rifrazione e la densità dell'aria* (1), al quale rimando per la descrizione dell'apparecchio e per il modo di far le misure.

(1) Rend. Accad. Lincei, vol. XIII, 1° sem., 1904, pag. 473.

Il compressore che ho adoperato è mosso da un motore da 7 cavalli e permette di arrivare a 200 atmosfere. L'aria compressa, dopo essere stata liberata dall'anidride carbonica e dall'acqua, passa in un tubo di rame che la distribuisce nel recipiente di compressione e nel densimetro.

Andamento delle esperienze. — La formula che deve servire per il calcolo della costante dielettrica si stabilisce molto facilmente.

Sia C_0 la capacità del condensatore sperimentale e l_0 la posizione corrispondente all'equilibrio della lastra mobile del condensatore di confronto. Immaginiamo che per una causa qualunque la capacità del condensatore sperimentale subisca una variazione, talchè essa divenga C_1: sia l_1 la posizione corrispondente della lastra mobile del condensatore di confronto. Se supponiamo che le variazioni di capacità C siano proporzionali alle variazioni di lunghezza l, allora la capacità corrispondente a qualunque lettura l del condensatore di confronto sarà

$$C = C_0 + \frac{C_1 - C_0}{l_1 - l_0}(l - l_0)$$

Se C_0 rappresenta la capacità del condensatore sperimentale quando il suo dielettrico ha una costante K_0, e C quella dello stesso condensatore quando la costante è K, allora

$$\frac{K}{K_0} = \frac{C}{C_0} = 1 + \frac{C_1 - C_0}{C_0}\,\frac{l - l_1}{l_1 - l_0}.$$

Dunque per fare la misura della costante dielettrica col metodo da me adottato, occorre prima determinare il valore del rapporto $\frac{C_1 - C_0}{C_0(l_1 - l_0)}$ per valori C_1 e C_0 comprendenti l'intervallo in cui si svolgono le misure, poi accertarsi della proporzionalità già ammessa fra le variazioni di capacità e gli spostamenti della lastra mobile del condensatore di confronto.

Per fare la determinazione suddetta ho sostituito il condensatore sperimentale con un condensatore ausiliario di capacità calcolabile costituito da due lastre di vetro ben piane argentate sulle due facce. Una di esse è fissa orizzontalmente, l'altra è mantenuta parallela alla precedente ed è sospesa ad una vite micrometrica che permette di darle spostamenti verticali. Si allontana la lastra mobile da quella fissa di una certa distanza d_0 e si determina la corrispondente posizione di equilibrio l_0 del condensatore di confronto. Poi si varia la distanza delle lastre del condensatore per mezzo della vite micrometrica: sia d_1 la nuova distanza e sia l_1 la corrispondente posizione di equilibrio del condensatore di confronto.

Il valore del rapporto $\frac{C_1 - C_0}{C_0}$ si calcola con la formula

$$\frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{d_0 - d_1}{d_1}\left(1 + \frac{0.44\,d_0}{a}\right)$$

dove a indica il lato di ognuna delle lastre del condensatore ausiliario. Il secondo termine fra parentesi è relativo alla correzione per gli orli [1].

Ecco un esempio di tale determinazione

d_1	$d_0 - d_1$	l_1	l_0	$\frac{C_0}{C_1 - C_0}(l_1 - l_0)$
1.989	0.1	35.96	41.37	110.24
»	»	35.95	41.35	110.09
»	»	35.96	41.35	109.88
»	»	35.96	41.35	109.88
»	0.05	38.65	41.40	109.39
»	»	38.61	41.37	109.79
»	»	38.65	41.40	109.79

Il termine $\frac{C_0}{C_1 - C_0}(l_1 - l_0)$ è riferito alla posizione l_0 del condensatore di confronto.

In questa serie le prime quattro determinazioni furono fatte variando la distanza iniziale di un millimetro; le successive variandola di 0.5 mm. La concordanza dei risultati è tale da far ritenere verificata la proporzionalità fra gli spostamenti della lastra mobile del condensatore di confronto e le variazioni della capacità, almeno nel tratto in cui si svolgono le esperienze.

Furono eseguite molte altre determinazioni dello stesso rapporto e la media di tutti i risultati riferiti alla divisione 33 della scala del condensatore di confronto è 101.50.

Dunque la formula che ci servirà per il calcolo della costante dielettrica è

$$K = K_0\left(\frac{l - l_0}{101.50 + (l_0 - 33)} + 1\right),$$

con K_0 indicando il valore della costante dielettrica dell'aria nelle condizioni in cui è stata fatta la lettura l_0, ossia alla pressione atmosferica.

È da notarsi che per inserire il condensatore ausiliario bisogna aggiungere due pezzi di filo; inoltre nella determinazione precedente è necessario tener conto delle comunicazioni che attraversano i tappi e che rappresentano una notevole capacità. Il calcolo di queste parti sarebbe stato certamente illusorio, quindi esse furono lasciate al loro posto tanto durante la precedente determinazione, quanto durante le misure. Per la prima operazione si svitarono i tappi dal blocco fino a togliere la comunicazione con le armature del condensatore sperimentale e furono stabilite le comunicazioni col condensatore ausiliario. Per le misure si riavvitarono i tappi, si escluse il condensatore

[1] Maxwell, v. I, § 293.

ausiliario, ma i fili di comunicazione si lasciarono isolati nella posizione che avevano precedentemente.

Tutte le determinazioni della costante dielettrica furono fatte per pressioni decrescenti, e d'ordinario l'intervallo fra due determinazioni successive fu di 25 atmosfere.

Risultati. — Nella tabella seguente sono riportate le medie dei valori di sette serie con l'errore medio di ogni determinazione. In essa ho anche calcolato l'espressione $\frac{K-1}{K+2}\frac{1}{D}$ che secondo la teoria del Mossotti dovrebbe restar costante, ed ho riportato i valori del quadrato dell'indice di rifrazione trovati dal Magri. Per il valore Ko della costante dielettrica dell'aria alla pressione atmosferica è stato assunto quello dato dal Boltzmann: 1,00059.

La temperatura media delle esperienze è di 11°.

Costante dielettrica K	Errore medio di K	Densità D	$\frac{1}{D}\frac{K-1}{K+2}$	Quadrato dell'indice di rifrazione n^2
1.0101	$\pm 0{,}4 \cdot 10^{-3}$	20	169.10^{-6}	1.0116
1.0196	$\pm 0{,}4 \cdot 10^{-3}$	40	162.10^{-6}	1.0237
1.0294	$\pm 0{,}6 \cdot 10^{-3}$	60	162.10^{-6}	1.0357
1.0387	$\pm 0{,}6 \cdot 10^{-3}$	80	159.10^{-6}	1.0477
1.0482	$\pm 0{,}6 \cdot 10^{-3}$	100	158.10^{-6}	1.0601
1.0579	$\pm 0{,}7 \cdot 10^{-3}$	120	158.10^{-6}	1.0721
1.0674	$\pm 0{,}9 \cdot 10^{-3}$	140	157.10^{-6}	1.0845
1.0760	$\pm 0{,}9 \cdot 10^{-3}$	160	154.10^{-6}	1.0971
1.0845	$\pm 1{,}0 \cdot 10^{-3}$	180	152.10^{-6}	1.1092

Discussione dei risultati. — Il calcolo della costante dielettrica dipende da due elementi: dalla lettura $l - l_0$ fatta sul condensatore di confronto, e dalla costante $\frac{C_0}{C_1 - C_0}(l_1 - l_0)$ che si determina una volta per sempre.

In quanto alla prima dirò che una lettura isolata del condensatore di confronto si fa a meno di 0,02 cm., e questo vuol dire che una variazione di 0,0002 nel valore della costante dielettrica sfuggirebbe all'osservazione, e che perciò i risultati, per quanto riguarda la sensibilità del metodo, si devono ritenere incerti nelle cifre del quart'ordine.

Il calcolo della costante $\frac{C_0}{C_1 - C_0}(l_1 - l_0)$ trova la maggior causa d'errore nelle imperfezioni della vite micrometrica che serve per misurare la distanza $d_1 - d_0$. La vite suddetta ha un passo di mezzo millimetro e permette la lettura del $^1/_{400}$ di millimetro. Avendola confrontata con un'altra

vite che permette la lettura di $^1/_{200}$ di mm., l'ho trovata concordante. Presumibilmente l'errore non oltrepassa $0^{mm},05$, e questo introdurrebbe nella determinazione suddetta un errore di 0,5, e nel valore di $K - 1$ un errore relativo di $^5/_{1000}$, che è quanto dire un'incertezza di quattro unità del quart'ordine nel massimo valore di K.

Oltre a questi errori provenienti da limitata sensibilità o da imperfezione degli apparecchi, ci sono quelli che derivano da variazioni della pressione e della temperatura. La pressione altera le dimensioni del condensatore sperimentale; ma prendendo come coefficiente di compressibilità lineare dell'ottone $3,6 \times 10^{-7}$ si avrebbe per duecento atmosfere un avvicinamento fra le lastre del condensatore minore di $^1/_{10000}$ della distanza totale, e quindi un errore che non arriverebbe ad intaccare la quarta cifra nel massimo valore di K.

In quanto agli errori introdotti dalle variazioni di temperatura non è possibile nemmeno una valutazione approssimata. Del resto in questo riguardo tutte le esperienze furono fatte in condizioni quasi identiche.

Credo perciò di non esagerare la precisione dei miei risultati ritenendoli esatti a meno di un'unità del terz'ordine.

Conclusioni. — Dalla tabella precedente si desume che il rapporto di Mossotti $\frac{K-1}{K+2}\frac{1}{D}$ non resta costante, ma decresce, di mano in mano che la pressione aumenta di quantità che non rientrano negli errori d'osservazione.

La tabella sudetta porta anche i valori del quadrato dell'indice di rifrazione. Essendo quest'ultimo elemento riferito ad una lunghezza d'onda dello spettro visibile ($\lambda = 0^{\mu},54623$), non può essere uguale alla costante dielettrica; gli scostamenti che si verificano rappresentano la dispersione crescente con la densità del mezzo.

Ritenendo verificata la formula del Mossotti (il che si può fare soltanto in prima approssimazione) la dipendenza fra la costante dielettrica e la densità del mezzo sarebbe rappresentata dalla formula

$$\frac{K-1}{K+2}\frac{1}{D} = 0,00016.$$

Se si prova a calcolare per mezzo di questa formula la costante dielettrica dell'aria liquida assumendo come densità di questa rispetto all'aria nelle condizioni normali il valore 871, si ha $K = 1,475$ che è poco discosto da quello trovato dal Dewar 1,495.

Naturalmente per dare il giusto peso a questo confronto, oltre alle riserve sopra l'estrapolazione, bisogna tenere in mente che l'aria liquida è di composizione diversa dall'aria atmosferica, e che forse non è lecito tener conto delle bassissime temperature soltanto con la densità.

Fisica. — *Sulla misura di piccoli coefficienti d'autoinduzione* [1]. Nota del dott. Michele La Rosa, presentata dal Corrispondente D. Macaluso.

Gravi difficoltà si presentano nella misura di piccoli coefficienti d'autoinduzione, per sormontare le quali diversi espedienti sono stati suggeriti da parecchi fisici.

Il Wien [2] per il primo è riuscito a misurare coefficienti d'autoinduzione piccolissimi, per mezzo del ponte di Wheatstone, impiegato però col suo telefono ottico e con correnti alternate di elevata frequenza.

Dopo di lui il Prerauer [3] con metodo analogo, riuscì a misurare il coefficiente d'autoinduzione di fili rettilinei di 50 cm. di lunghezza; e lo stesso Wien [4], in un lavoro successivo, tornò sulla misura di coefficienti assai piccoli di circuiti piani con forma geometrica molto semplice. Le misure di entrambi diedero valori che concordano bene con quelli che dalle formole teoriche si deducono per gli stessi circuiti.

Però non è facile riprodurre la disposizione da essi adottata per la difficoltà tanto di procurarsi il telefono ottico, che del funzionamento di questo apparecchio, a causa della perfetta sintonizzazione da realizzare fra il telefono e l'interruttore a corda vibrante che serve alla produzione della corrente alternata.

Ulteriori misure di piccoli coefficienti furono fatte da Seiler [5], con la determinazione del periodo delle oscillazioni prodotte nella carica di un condensatore; ma si tratta di una ricerca molto delicata che non può trovare posto fra i metodi rapidi ed essenzialmente pratici di misura.

Puluj [6] e Troje [7] avevano cercato di servirsi di un metodo, prima ideato da Oberbeck e fondato sull'azione mutua di due bobine, disposte l'una dentro l'altra, come quelle di un elettrodinamometro e percorse da correnti sinusoidali di alta frequenza; però la necessaria conoscenza del periodo rende di non facile impiego questo metodo, del resto non abbastanza sensibile, per la misura di piccole induttanze.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.
(2) Max Wien, Wied. Ann., vol. 44, pag. 689, 1891.
(3) Osw Prerauer, Wied. Ann., vol. 53, pag. 772, 1894.
(4) Max Wien, Wied. Ann., vol. 53, pag. 928, 1894.
(5) Seiler, Wied. Ann., vol. 61, pag. 31, 1897.
(6) Puluj, Electrotek. Zeitschr., vol. 12, pag. 396, 1891.
(7) Troje, Wied. Ann., vol. 47, pag. 501, 1892.

Migliori furono i risultati conseguiti dal Martienssen (1), con un apparecchio che si fonda pure sullo spostamento di fase di due correnti sinusoidali in due bobine derivate sullo stesso circuito e disposte come precedentemente. Annullando lo spostamento di fase con un circuito ausiliare, di resistenza variabile, avvolto in parte su una delle due bobine, si può calcolare la induttanza di queste. Tale metodo richiede, oltre un apparecchio apposito, l'impiego di correnti sinusoidali e la conoscenza della frequenza, qualora questa oltrepassi un certo limite (intorno a 500 alter.).

Il dott. Manzetti (2) ha recentemente introdotto un'utile semplificazione nell'apparecchio del Martienssen, annullando lo spostamento di fase con un condensatore derivato agli estremi di una resistenza non induttiva, variabile, ed attaccata in serie con una delle bobine; così ha potuto misurare, con molta esattezza, delle induttanze dell'ordine 0,002 henry. Però sono anche in questo caso necessarî un apparecchio apposito ed una corrente sinusoidale.

Un altro metodo semplice è stato suggerito dal Janet (3), basato sull'impiego delle correnti di Duddell, supposte sinusoidali e col periodo determinato dalle condizioni di risonanza. L'induttanza viene dedotta dalla forza elettromotrice efficace, esistente ai poli della bobina e dall'intensità efficace della corrente che la percorre. Gli errori in queste misure, per le variabili condizioni dell'arco cantante, sono molto notevoli e, come risulta da uno studio del prof. Corbino (4), possono raggiungere il 20 %.

Questi metodi più o meno complicati ed indiretti sono stati sostituiti ai metodi classici e semplici fondati sull'impiego del ponte di Wheatstone, perchè si è generalmente ritenuto che il ponte, anche opportunamente impiegato, non si presti alla misura di piccoli coefficienti d'autoinduzione.

Il Graetz (5) in un lavoro sulla misura di auto- e mutue-induzioni afferma che i metodi derivati da quello di Maxwell possono dare un risultato, solamente quando si tratta di induttanze abbastanza grandi e falliscono del tutto per piccoli valori.

Il Martienssen nel lavoro sopra citato dice: « I metodi conosciuti per la misura assoluta del coefficiente d'autoinduzione di un conduttore secondo Maxwell col ponte di Wheatstone, come anche le modificazioni di essi dovute

(1) Martienssen, Wied. Ann., vol. 67, pag. 95, 1899.

(2) Manzetti, Atti A. E. I., vol. VI, pag, 377, 1902.

(3) Janet, C. R., vol. 134, pag. 462, 1902.

(4) Corbino, Atti A. E. I., vol. 7, pag. 597, 1903.

(5) « Und doch ist die Messung und Vergleichung von Selbstpotentialen bisher noch eine recht schwierige Aufgabe der messenden Physik. Die von Maxwell herrührenden Methoden für diese, sei es absoluten, sei es relativen Messungen, setzen ein äusserst empfindliches Galvanometer und günstige äussere Umstände voraus und liefern auch bei relativen Messungen durch recht mühsame doppelte Abgleichung nur dann ein Resultat, wenn es sich um ziemlich grosse Werthen des Selbstpotentials handelt; bei kleinen Werthe desselben *versagen sie ganz* ». Graetz, Wied. Ann., vol. 50 pag. 766, 1893.

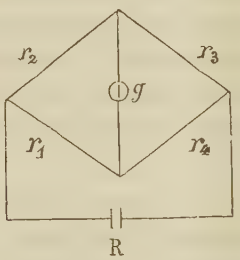
a Kohlrausch, Graetz, Himstedt, *falliscono totalmente* per induttanze minori di 10^6 cm. ».

Ed il dott. Manzetti dice: « Quando si debbano misurare coefficienti di autoinduzione molto piccoli, al disotto di $^1/_{100}$ o $^1/_{1000}$ di henry, i metodi ordinarî di Maxwell, Pirani ecc. presentano gravi difficoltà, se non *l'impossibilità assoluta di eseguire la misura* ».

Lo stesso Prerauer, il quale si serve del ponte di Wheatstone, sente bisogno di avvertire che « per piccole autoinduzioni non si può lavorare con un solo impulso della corrente ed il galvanometro, bisogna invece ricorrere alle correnti alternate . . . ».

Avendo dovuto io misurare alcuni piccoli coefficienti d'autoinduzione e non disponendo dei mezzi speciali sopra citati, ho voluto esaminare fin dove potesse servire il ponte ed ho trovato che, scegliendo opportunamente le resistenze dei lati ed un galvanometro abbastanza sensibile, il ponte può impiegarsi per la misura di coefficienti assai piccoli, della medesima grandezza di quelli misurati dal Wien e dal Prerauer che sono i più piccoli finora sperimentalmente determinati.

In conferma di ciò mi permetto di pubblicare, insieme con alcune osservazioni sulla scelta più conveniente delle resistenze, qualche risultato delle mie misure.



Siano r_1, r_2, r_3, r_4 le resistenze dei quattro lati di un ponte di Wheatstone, dei quali solo quello di resistenza r_4 abbia una induttanza L. Sia g la resistenza del galvanometro ed R quella della pila, sia inoltre i_4 l'intensità della corrente a regime permanente nel lato r_4.

La frazione q della quantità d'elettricità, messa in moto dall'induttanza L e che passa per il galvanometro, è data, come si sa (1), dalla relazione:

$$q = \frac{Li_4}{r_3 + r_4 \dfrac{g(r_1+r_2)}{g+r_1+r_2}} \cdot \frac{r_1+r_2}{g+r_1+r_2}$$

(1) Gerard, Mes. Electr, pag. 275.

che scritta nella forma:

$$q = \frac{Li_4}{g\left(1 + \frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2}\right) + (r_3 + r_4)}$$

mostra che la quantità q d'elettricità è tanto più grande, per un valore costante di Li_4, quanto più grande è $r_1 + r_2$, e quanto più piccole sono g, ed $r_3 + r_4$.

Inoltre l'effetto prodotto dalla pila sarà massimo quando è soddisfatta la relazione:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1 + r_4} + \frac{1}{r_2 + r_3}$$

e poichè R dev'essere piccola, impiegando come è opportuno, una piccola f. e. m., dovrà non solo essere grande la somma $r_1 + r_2$ e piccola la $r_3 + r_4$, ma ancora piccola dev'essere una delle somme $r_1 + r_4$, $r_2 + r_3$ e per conseguenza una delle due quantità r_1, r_2.

Dall'altro canto, siccome la q cresce al crescere di i_4, è evidente che piccola dovrà scegliersi la r_4.

Si vede perciò che nella misura di un'induttanza col ponte, per avere una grande sensibilità, è necessario che i tre lati r_1, r_3, r_4 siano di piccola resistenza, al più dell'ordine di grandezza della resistenza interna della pila e del galvanometro, ed il quarto lato r_2, cioè quello opposto all'induttanza, di grande resistenza.

Il Wien ed il Prerauer invece hanno applicato alle misure d'induttanza le condizioni di massima sensibilità del ponte per le misure di resistenze, scegliendo tutti e sei i lati poco resistenti; da ciò dipende l'impossibilità dell'uso del galvanometro messa in rilievo dal secondo nelle parole che sopra ho riportato.

Se nella misura in esame col ponte, si vuole compensare l'effetto dell'induttanza per mezzo di una capacità in derivazione (metodo di riduzione a zero), conformemente a quanto sopra si è detto, è da scartare il metodo di Pirani che richiede l'impiego di una resistenza notevole nel ramo stesso dell'induttanza da misurare, ed è invece da preferire il medoto di Sumpner, secondo il quale la forte resistenza va introdotta nel ramo opposto all'induttanza.

Di quest'ultimo appunto mi sono giovato nelle numerose misure che ho eseguito e sulle quali riferisco in seguito brevemente.

Nelle mie determinazioni sperimentali le due resistenze r_1 ed r_2 erano formate da bobine, senza autoinduzione, di una cassetta di resistenze e sta-

vano sempre nel rapporto di uno a cento. La r_3 era data da un'altra cassetta, nella quale la resistenza poteva farsi variare per decimi di ohm, e da un reocordo con due fili di rame molto vicini e contatto scorrevole a mercurio; la r_4 era infine la resistenza del circuito di cui si doveva misurare l'induttanza.

Agli estremi della r_2 era derivato un ottimo condensatore con dielettrico di mica, a capacità variabile da 0,001 ad 1 microfarad. La misura di L si otteneva realizzando prima l'equilibrio nel galvanometro a regime permanente regolando la resistenza r_3, e poi l'equilibrio a regime variabile mutando solamente la capacità. Il valore di L viene allora espresso, come è noto, dalla relazione:

$$L = C\, r_2\, r_4 = C\, r_1\, r_3$$

dove C denota la capacità necessaria per avere nel ponte l'equilibrio completo.

I coefficienti d'autoinduzione da me misurati furono compresi tra $3 \cdot 10^6$ e $5 \cdot 10^2$ cm. Per i più grandi ho potuto impiegare un galvanometro a telaio mobile Hartmann e Braun, con resistenza interna di 30 ohm ed una durata di oscillazione di 8″. Sopra una scala, a 168 cm. di distanza, si aveva una deviazione di un millimetro per il passaggio attraverso al galvanometro della quantità di elettricità $2 \cdot 10^{-8}$ coulomb. Il vero ponte era costituito da questo galvanometro unitamente ad una resistenza di 100 ohm, la quale, pur facendo perdere in sensibilità, serviva a diminuire lo smorzamento eccessivo. La perfetta stabilità di questo apparecchio permetteva di apprezzare nettamente una deviazione di qualche decimo di divisione. La corrente era fornita da due accumulatori.

L'errore nella misura di L si poteva ritenere dipendente soltanto dall'incertezza inerente alla determinazione di C, essendo tutti gli altri errori possibili certamente compresi nei limiti di tale incertezza, come facilmente si riconosce, pensando che le deviazioni al galvanometro (a regime variabile) si mantenevano inapprezzabili anche quando la C si faceva variare di un ventesimo del suo valore totale.

Per ottenere in tale determinazione una grande esattezza si notavano, per valori sempre crescenti della capacità, le deviazioni galvanometriche corrispondenti, le quali dapprima decrescevano, in seguito diventavano inapprezzabili e poi tornavano a manifestarsi crescenti ma invertite di senso. La curva delle deviazioni successive in funzione delle capacità non era simmetrica rispetto all'asse di queste, pure dentro limiti ristretti si poteva considerare come tale e dedurre, interpolando fra deviazioni molto piccole, il valore C corrispondente all'equilibrio con un errore che l'esperienza dimostrò non superiore all'1 %.

Riporto, come esempio, una di tali misure presa a caso dal mio quaderno (sistema industriale).

r_1	r_2	r_3	C	L
25	2500	47,12	$0{,}345 \cdot 10^{-6}$	$0{,}406 \cdot 10^{-3}$
15	1500	47,20	0,570 »	0,404 »
12	1200	47,25	0,720 »	0,407 »
25	2500	47,13	0,343 »	0,404 »

Essa mostra che le divergenze si mantengono dentro il limite detto, anche quando vengono mutate le condizioni in cui è fatta la misura.

La disposizione sopraindicata non si prestava a determinazioni di coefficienti inferiori a 2×10^4 cm. Per poterle realizzare, a quello di Hartmann e Braun fu sostituito un galvanometro di Du Bois e Rubens con equipaggio leggerissimo, protetto da corazze di ferro dolce, e con una resistenza interna di dieci ohm. Sopra una scala distante 168 cm. si aveva la deviazione di 1 mm. per il passaggio della quantità d'elettricità $1 \cdot 10^{-9}$ coulomb, quando la sua durata d'oscillazione era, come fu sempre, di 5″. Una maggiore astatizzazione riusciva dannosa per la facilità con cui allora si smorzavano le oscillazioni. Ai due accumulatori fu sostituita una semplice pila Grenet.

In queste condizioni la sensibilità del metodo era quasi 200 volte maggiore che nelle precedenti (1).

Dovetti perciò molto preoccuparmi dell'induttanza propria della combinazione e cercai di renderla quanto più piccola era possibile, disponendo i quattro vertici del quadrilatero vicinissimi fra loro, e ciascun lato in modo che, ad ogni suo elemento ne corrispondesse un altro (dello stesso lato) ad esso parallelo e molto prossimo, percorso in senso inverso dalla corrente.

Ciò non ostante una piccola induttanza residua rimaneva sempre. Cercai determinarla con l'esperienza, riunendo insieme gli estremi del cordoncino (di lunghezza notevole) al quale solevo attaccare l'induttanza da misurare e procedendo come di solito. Come media di molte prove risultò una induttanza residua di 250 cm. circa.

A causa del piccolo ma continuo moto dell'equipaggio del galvanometro, dovuto ai tremiti incessanti in questo laboratorio per la sua ubicazione, non si poteva garentire nelle letture delle deviazioni un'approssimazione supe-

(1) Scaricando la stessa quantità di elettricità nei due galvanometri, osservati nelle medesime condizioni, si aveva nel galvanometro di Du Bois e Rubens una deviazione 20 volte maggiore che in quello di Hartmann e Braun. Questo rapporto diventava uguale a 15 se invece i due galvanometri venivano shuntati in condizioni simili a quelle delle esperienze. In queste però il rapporto delle due sensibilità diventava quasi 200 per la mutata resistenza del ponte.

riore ad una mezza divisione. Ciò produceva un errore assoluto quasi costante per tutte le misure, e quindi si aveva un'esattezza tanto minore quanto più piccola era la grandezza misurata. Così mentre era facile misurare un'induttanza di 30000 cm. con un errore inferiore a 3 per mille, dovetti contentarmi di errori anche superiori al 6 o 7 % per induttanza inferiore a 1000 cm.

Così per alcuni circuiti di una sola spira di rame di forma circolare si è trovato (unità comune il cm.):

raggio della sezione	raggio del circolo	L misurato	L calcolato	differenza in %
0,056	18,50	1250	1220	+ 2,5
0,135	15,44	975	1012	− 3,7
0,056	20,00	1466	1557	— 6,0
0,054	8,57	534	582	— 8,7

Con un quadrato di 101 cm. di perimetro di filo di rame, con sezione di raggio 0,071, ho trovato con la misura $\frac{8}{3}$ L = 1060 e col calcolo 1082.

Misure più esatte avrei potuto ottenere lavorando a tarda notte, ma ciò non feci perchè il còmpito prefissomi era semplicemente quello di accertare la possibilità di misurare coefficienti d'autoinduzione così piccoli col ponte ed il galvanometro.

Fisica terrestre. — *Risultati pireliometrici ottenuti dal 3 luglio al 21 agosto 1902 al R. Osservatorio Geofisico di Modena.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio P. Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Studio cristallografico di alcune sostanze organiche.* Nota del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Socio G. Struever.

Acido 4-acetilamino-6-nitro-1.3-metatoluico

$$C_6H_2 \begin{cases} CH_3 & (1) \\ COOH & (3) \\ NHC_2H_3O & (4) \\ NO_3 & (6) \end{cases}$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

Ottenuto dal prof. G. Errera della R. Università di Messina, come uno fra i numerosi prodotti di ossidazione del 4-biacetilamino-6-nitro-1.3-metaxilene (1).

Fonde a 223°-225° decomponendosi.

Sistema cristallino: *triclino*

$$a : b : c = 1{,}6623 : 1 : 1{,}0340$$

$$\alpha = 79°{,}40' \quad ; \quad \beta = 64°{,}4' \quad ; \quad \gamma = 105°{,}33'.$$

Forme osservate:

$$\{100\}, \{010\}, \{001\}, \{\bar{1}11\}, \{1\bar{1}1\}$$

Combinazioni osservate:

1ª $\{100\}$ $\{010\}$ $\{001\}$ $\{\bar{1}11\}$ (v. fig. 1)

2ª $\{100\}$ $\{010\}$ $\{001\}$ $\{\bar{1}11\}$ $\{1\bar{1}1\}$ (v. fig. 2)

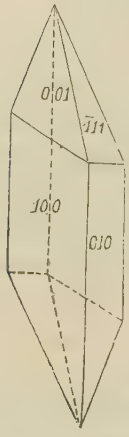


Fig. 1.

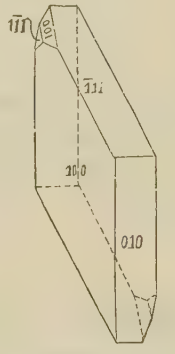


Fig. 2.

ANGOLI	N.	MISURATI			CALCOLATI	DIFFERENZE esp. — calc.
		Limiti		Medie		
001:010	4	79°20′ —	80° 7′	79°40′	—	—
001:100	4	63.36 —	64.16	64. 4	—	—
001:1$\bar{1}$1	2	49.17 —	49.23	49.20	—	—
100:1$\bar{1}$1	2	38.12 —	38.16	38.14	—	—
100:010	6	104.58 —	106.33	105.33	—	—
1$\bar{1}$1:0$\bar{1}$0	1	—		55.36	55°39′44″	— 3′44″
$\bar{1}$11:001	5	55. 2 —	56.36	55.37	55. 8.45	+ 28.15
$\bar{1}$11:010	4	32.20 —	33.26	32.46	32.56.14	— 10.14
$\bar{1}$11:$\bar{1}$00	5	72.24 —	73.32	72.49	73. 3.18	— 14.18

(1) Ancora inedito.

I cristalli misurati presentano dimensioni massime di 1-2mm. circa, e se ne ottennero di poco più grandi.

Essi sono costantemente allungati secondo [001] e non di rado, specie i più grandi, alquanto schiacciati secondo [100]. Il loro abito più frequente è rappresentato dalla fig. 2, rarissimi sono quelli rappresentati dalla fig. 1.

Presentano la combinazione di tutte le forme osservate ad eccezione di pochissimi, sui quali non si riscontra la $\}1\bar{1}1\{$, la quale è sempre subordinata alla $\}001\{$. Le $\{100\}$, $\}010\{$, $\}\bar{1}11\{$ sono le forme costantemente predominanti. Le faccie, specialmente quelle di maggiore ampiezza, presentano molto spesso poliedria, dimodochè, pur mostrandosi brillanti, al goniometro riflettono immagini doppie, triple, spesse volte multiple, a contorni più o meno definiti.

Sfaldatura facile e perfetta secondo (001).

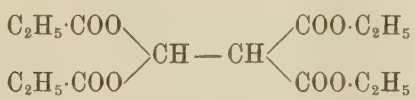
I cristalli sono di colore giallo zolfo, a splendore vitreo e trasparenti.

Bisettrice acuta $\perp$ (001).

Doppia rifrazione negativa.

Non furono possibili ulteriori osservazioni ottiche.

Etere acetilentetracarbonico (1)



Ottenuto dal dott. G. Romeo (2) nella preparazione dell'etere metilmalonico col metodo di Zublin (3), il quale non aveva rilevata la formazione di questa sostanza; mentre gli scopritori di essa, Conrad e Bischoff (4) l'ebbero per azione dell'etere cloromalonico sopra l'etere sodiomalonico, e Conrad e Guthzeit (5) per riduzione dell'etere dicarbontetracarbonico.

Punto di fusione 74°-75°.

I cristalli da me studiati furono ottenuti una sola volta in condizioni indeterminate, e poichè la $\}001\{$ si presenta costantemente a facce incurvate e scabre, si presta alla misura solo la zona [001], dove si riscontra la combinazione $\}110\{$ $\}100\{$.

Le numerose prove tentate per avere buoni cristalli diedero sempre individui aghiformi, fortemente striati, con estremità indeterminabili e tali

(1) La sostanza non è nuova, ma a quanto mi risulta, pare non ne sia stato fatto lo studio cristallografico.

(2) Gazz. Chimica ital., t. XXXV, parte I, 1905.

(3) Berichte d. deutsch. chem. Gesell., 1879, 1113

(4) Ann. 214, 68.

(5) Ber. 16, 2632.

da rendere impossibile qualsiasi misura, perciò mi sono dovuto limitare al solo riconoscimento del sistema cristallino, che ritengo *dimetrico* per le seguenti osservazioni, le quali furono le sole possibili:

Dalla zona misurata in diversi cristalli, rilevasi:

ANGOLI	N.	MISURATI	
		Limiti	Medie
110:$\bar{1}$10	10	89°.48′ — 90°.17′	89°.59′. 1″
100:110	8	44.41 — 45.13	44.59.23

Le direzioni di massima estinzione osservate su (110) e (100) si presentano rispettivamente parallele agli spigoli di esse facce.

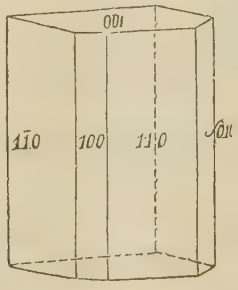


Fig. 3.

Una lamina del cristallo tagliata secondo (001) si mostra monorifrangente e su di essa si riscontra la figura d'interferenza caratteristica delle sostanze monoassi.

Infine la sfaldatura si è riscontrata, facile e perfetta, secondo le due direzioni delle facce del prisma }110{.

I cristalli, la cui dimensione varia da $\frac{1}{2}$ a 2 mm. circa, sono abbastanza regolari, con abito prismatico, un po' allungati secondo l'asse *z*.

Presentano una fine striatura secondo [001], che, mentre è visibilissima nei cristalli di maggiori dimensioni, non si riscontra affatto nei più piccoli.

Le facce del prisma }100{ sono sempre poco sviluppate ed in tutti i cristalli osservati non esistono le parallele alle (100) e (010). Le facce della base hanno una curvatura massima verso l'intersezione loro con quelle dei prismi.

I cristalli piccoli sono incolori e semitrasparenti, mentre i grandi, pur conservando la trasparenza, hanno un colore roseo carnicino. Tutti hanno splendore vitreo.

Etere p-nitrobenzilmetilmalonico

$$\begin{array}{l} COO\cdot C_2H_5 \\ | \\ C<\begin{array}{l} CH_3 \\ CH_2\cdot C_6H_4NO_2 \end{array} \\ | \\ COO\cdot C_2H_5 \end{array}$$

Ottenuto dal dott. G. Romeo (1) facendo agire il cloruro di p-nitrobenzile sopra l'etere sodiometilmalonico.

Punto di fusione 59°-60°5′.

Sistema cristallino: *monoclino*

$$a:b:c = 0.98532:1:1,15785$$
$$\beta = 66°.57'.46''$$

Forme osservate:

$$\{110\}, \{011\}, \{100\}.$$

Combinazioni osservate:

1ª $\{110\}$ $\{011\}$
2ª $\{110\}$ $\{011\}$ $\{100\}$ (v. fig. 4).

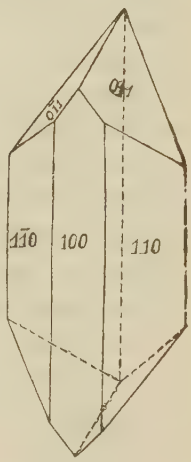


Fig. 4.

ANGOLI	N.	MISURATI		CALCOLATI	DIFFERENZE esp. — calc.
		Limiti	Medie		
110:100	3	42° 2′ — 42°18′	42°12′	—	—
100:011	2	74.13 — 74.43	74.28	—	—
011:001	1	—	46.49	—	—
011:110	2	46.18 — 46.42	46.30	46°30′48″	— 0′48″
011:$\bar{1}$10	2	72.52 — 73. 3	72.57′30″	73. 3.28	— 5.58
$\bar{1}$10:110	2	95.28.20″ — 95.29.20″	95.28.50	95.36	— 7.10

Le facce della zona [001] si presentano quasi sempre incurvate nel senso della zona stessa, perciò gli angoli su cui fu fondato il calcolo per la determinazione delle suddette costanti, furono misurati tutti su di un cristallo scelto fra i migliori; ma anche tutte le misure discrete eseguite

(1) Gazzetta Chim. ital., t. XXXV, parte I, 1905.

sopra altri cristalli vanno abbastanza di accordo con quelle prese per fondamentali, come rilevasi dai seguenti valori:

ANGOLI	MISURATI		CALCOLATI
	2° cristallo	3° cristallo	
011:110	—	46°.23′	46°.30′.48″
011:$\bar{1}$10	73°.12′	72.58	73. 3.28
$\bar{1}$10:110	95.31	—	95.36

I cristalli raggiungono una dimensione massima di mm. 7 circa e sono sempre allungati nel senso dell'asse [001].

La 1ª combinazione è la più frequente e nei cristalli in cui si presenta la faccia (100) non ho mai riscontrata la sua parallela.

La forma predominante è sempre la }110{, seguono in ordine decrescente il prisma }011{ ed il pinacoide }100{.

Sfaldatura perfetta in lamine sottili e pieghevoli || ($1\bar{1}0$).

I cristalli sono incolori, trasparenti, a splendore vitreo.

Una direzione di massima estinzione fa sopra (110), e verso destra, con lo spigolo (110):(100) un angolo di 9° circa.

Chimica. — *Sulla indolina.* Nota di G. Plancher e C. Ravenna (1), presentata dal Socio G. Ciamician.

L'indolina o diidroindolo, la sostanza madre degli alcaloidi indolici, abbenchè ne siano noti numerosi suoi derivati anche dei più semplici, non è stata finora preparata.

Gli omologhi indoli si riducono facilmente ad indoline sostituite, ma l'indolo resiste agli stessi mezzi idrogenanti, e per questa via non si potè ottenere l'indolina fondamentale.

Eppure, ci pare interessante conoscere primieramente le sue proprietà; conosciute le quali reputiamo cosa più facile vedere quale sia la ragione per cui la idrogenazione dell'indolo presenta le note difficoltà (2) e avvisare ai modi di rimuoverle.

La prima parte di questo programma costituisce l'oggetto di questa comunicazione.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica agraria della R. Università di Bologna.

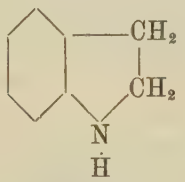
(2) Ciamician e Zatti, Gazz. Chim. it., *20*, 96. Questi Rendiconti, serie IV, vol. V, 2° sem. 1889, pag. 105.

Abbiamo ottenuta l' indolina per via indiretta, partendo dall' N-metil-indolina.

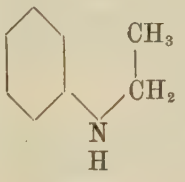
È noto che quest'ultima base si ottiene facilmente riducendo con zinco ed acido cloridrico l'N-metilindolo (1), il quale si prepara condensando il metilfenilidrazone dell'acido piruvico e distillando l'acido N-metilindol-α carbonico così formatosi (2).

Trattando la N-metilindolina in tubo chiuso con acido jodidrico e fosforo essa perde l' N-metile e dà l' indolina.

Le proprietà dell' indolina dovrebbero essere, come lo fanno supporre le ricerche di Ciamician, di Bamberger e di A. von Baeyer sulla idrogenazione dei nuclei acromatici, e la conoscenza delle indoline omologhe, quelle di un'etilanilina come risulta dalle due seguenti formole:



Indolina



Etilanilina

Così è difatti, salvo qualche differenza, tra le quali è notevole quella che, mentre l'etilanilina è poco stabile all'aria e si colora rapidamente, l' indolina invece resiste assai e si serba lungamente inalterata.

Anche nell'odore non si discosta dal debole odore anilico. Ossidata col metodo di Tafel dà l' indolo (3).

Smetilazione della N-metilindolina. Questa base (1 gr.) fu chiusa in tubo con 1 gr. di fosforo rosso e 8 gr. di acido jodidrico bollente a 127°, e venne scaldata per 24 ore a 210°-230°. In capo a questo tempo il fosforo era completamente scomparso, il contenuto dei tubi perfettamente incoloro e in qualche caso cosparso di cristalli di joduro di fosfonio, oltre una piccola quantità di cristalli aciculari, forse del jodidrato di indolina. Esso venne riunito diluito con acqua e sottoposto, tale e quale, alla corrente di vapor d'acqua per scacciarne lievi quantità di derivati non basici, non che l' idrogeno fosforato formatosi nella reazione. In seguito, il residuo alcalizzato fortemente con soda, libera una base incolora meno leggera dell'acqua, di debole odore, che estratta con etere e seccata nel solvente con potassa fusa bollì a 220°-221°.

Il rendimento fu quasi quantitativo.

(1) Wenzing, Ann. d. Chemie *239*, 246.

(2) E. Fischer e O. Hess., Ber. d. deutsch. Chem. Gesell., *17*, 562.

(3) Kann und Tafel, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. *27*, 826.

Questa base si salifica assai facilmente, e si conserva a lungo inalterata, solo dopo molto tempo si imbruna alquanto. Al contrario dell'N-metilindolina la sua soluzione solforica diluita non si colora con acido nitroso (vedi più avanti). Per caratterizzarla ne furono preparati alcuni sali e il benzoilderivato, e per stabilire la sua natura secondaria se ne fece la nitrosoammina, di cui fu anche determinato il peso molecolare che risultò corrispondente alla formola semplice.

Il punto di ebullizione (la N-metilindolina bolle a 216°), la facile reazionabilità e la sudetta ultima circostanza ci rendono certi che la indolina, non è, ciò che prima era temibile, una polimera della formula $C_8 H_9 N$.

Picrato. Fu preparato trattando la base con soluzione alcoolica satura di acido picrico. Si separa sotto forma di un corpo giallo chiaro voluminoso, che cristallizzato ripetutamente dall'alcool assoluto, in cui è poco solubile a freddo e discretamente a caldo, si separa in minutissimi cristalli che riempiono tutta la massa del solvente e fondono a 174°.

Analisi:

I) gr. 0,1412 di sostanza diedero gr. 0,2493 di CO_2 e gr. 0,0484 di H_2O
II) gr. 0,1374 » » » cc. 19,1 di N ($t. = 17$; $p = 761$ mm.).

Calcolato per $C_{14} H_{12} N_4 O_7$ %		Trovato %	
C	48,24	C	48,15
H	3,47	H	3,86
N	16,13	N	16,02.

Dal picrato, con alcali, si libera la base che, distillandola al vapor d'acqua, può aversi purissima.

Il picrato di N-metilindolina è già stato descritto da Wenzing (l. cit.); che cristallizzatolo dal benzolo lo ebbe in grossi cristalli d'aspetto romboidale fondenti a 155°, ma non fu analizzato.

Noi lo ripreparammo.

Picrato di N-metilindolina. Ottenuto in modo identico al sopradescritto e cristallizzato dall'alcool si ebbe simile nell'aspetto a quello dell' indolina, ma fondente invece che a 155° (come dice Wenzing) a 165°. Per maggior sicurezza lo analizzammo.

gr. 0,1761 di sostanza diedero cc. 22,2 di N ($t = 7$; $p = 760$ mm.).

Calcolato per $C_{15} H_{14} N_4 O_7$ %		Trovato %	
N	15,50	N	15,31.

Anche per la solubilità in alcool differisce poco dal precedente.

Cloridrato e cloroplatinato di indolina. Evaporando la soluzione cloridrica dell' indolina si ottiene con cloridrato incoloro, che cristallizza dall'alcool. La soluzione cloridrica acquosa trattata con acido cloroplatinico dà un precipitato giallo che presto diventa roseo. Raccolto su filtro e lavato alla pompa aspirante, fu seccato nel vuoto a peso costante. Scaldato in tubicino, prima di fondere, verso 180° si decompone.

Analisi:

gr. 0,2500 di sostanza lasciarono per calcinazione gr. 0,0756 di Pt.

Calcolato per $(C_8H_9N)_2H_2PtCl_6$ %		Trovato %	
Pt	30,15	Pt	30,24

Ossalato. Questo sale dell' indolina si forma aggiungendo la base ad una soluzione eterea satura di acido ossalico, si separa in bei cristalli incolori che ricristallizzati dall'alcool fondono a 128° (il sale corrispondente della N-metilindolina fonde a 103°-105° [Wenzing]). È un ossalato acido come risulta da una determinazione di acido ossalico.

Con gr. 0,3208 di sostanza si ebbero gr. 0,0864 di CaO corrispondenti a gr. 0,1389 di acido ossalico.

Calcolato per $C_{10}H_{11}NO_4$ %		Trovato %	
$(C_2H_2O_4)$	43,04	$(C_2H_2O_4)$	43,29

gr. 0,1485 di sostanza diedero gr. 0,3126 di CO_2 e gr. 0,0724 di H_2O.

Calcolato per $C_{10}H_{10}NO_4$ %		Trovato %	
C	57,38	C	57,41
H	5,30	H	5,45

N-Benzoilindolina. Agitando fortemente il cloruro di benzoile aggiunto a goccia a goccia, con una emulsione della base in soda al 10 %, mantenuta raffreddata con acqua dell'acquedotto, si separa a poco a poco una massa solida. Estratta con etere e lavato l'estratto etereo con acido cloridrico diluito e quindi con carbonato sodico diluito, lo si seccò su carbonato potassico calcinato. Distillando l'etere rimane un residuo cristallino quasi incoloro. Ricristallizzato dall'etere acetico ripetutamente, fonde a 118°-119°. Si presenta in cristalli d'aspetto prismatico incolori e rifrangenti.

Analisi:

1) gr. 0,1623 di sostanza diedero gr. 0,4780 di CO_2 e gr. 0,0893 di H_2O
2) » 0,1478 » » » 0,4354 » » 0,0810 »

Calcolato per $C_{15}H_{13}NO_2$ %		Trovato %	
C	80,68	C	80,32; 80,34
H	5,83	H	6,15; 6,13

Dalla formazione di questo derivato risulta la natura secondaria di questa base. Per metter la quale in maggior evidenza preparammo la nitrosoammina.

Nitrosoindolina. Si ottiene trattando una soluzione concentrata della base in acido solforico al 10 % tenuta ben fredda, con nitrito potassico in soluzione acquosa concentrata. Il liquido non si colora, si separa invece un olio giallo chiaro dapprima emulsionato, che tosto cristallizza in belle scagliette lucenti gialliccie, che estratte con etere e lavate in soluzione con carbonato sodico diluito e con acqua, furono seccati con carbonato potassico calcinato. L'estratto etereo secco, lievemente giallo, lascia un residuo cristallino, che ripreso con etere di petrolio secco bollente in cui non è molto solubile, si depone per raffreddamento in squame appena colorate in giallo che fondono ad 83°-84°.

Analisi:

I gr. 0,1580 di sostanza diedero cc. 26,4 di N ($t = 15,8$; $p = 160$).
II » 0,1570 » » gr. 0,3735 di CO_2 e gr. 0,0784 di H_2O.

Calcolato per $C_8H_8N^2O$ %		Trovato %
C	64,82	C 64,88
H	5,45	H 5,58
N	18,96	N 19,32

Essa ha la formola semplice come dimostra la seguente determinazione del peso molecolare:

Solvente: Benzolo ($K = 51$) P. mol. $C_8H_8N_2O = 148$

	Concentrazioni	Abbassamenti	P. mol. trovato
I	1,431	0,495	147.
II	2,47	0,85	148.

Questa nitrosoammina dà la reazione di Liebermann e quella colla soluzione solforica di difenilammina, distinte quantunque un po' a stento. Trattata con cloridrato di idrossilammina ridà l'indolina: quantità equimolecolari di cloridrato di idrossilammina e di nitrosoindolina in soluzione alcoolica concentrata, furono bollite a ricadere per tre o quattro ore. Il liquido si colorò intensamente; addizionato di qualche goccia di acido cloridrico e scacciato l'alcool, il residuo cristallino e bruniccio del cloridrato di indolina formatosi fu distillato a vapore d'acqua a reazione alcalina per soda. Passò così l'indolina che estratta con etere fu trasformata nel picrato, il quale risultò identico a quello ottenuto dall'indolina primitiva, vale a dire fonde a 174°.

Analisi:

gr. 0,1547 di sostanza diedero gr. 0,2744 di CO_2 e gr. 0,0490 di H_2O.

Calcolato per $C_{14}H_{12}N_4O_7$ %		Trovato %
C	48,24	C 48,37
H	3,47	H 3,54

Resta perciò attestata la vera natura di N-nitrosoderivato di questo corpo, e di riverbero con tutta sicurezza la natura secondaria dell' indolina.

Da quanto è esposto risulta che l' indolina è un corpo stabile ai reattivi comuni e che perciò non possono dalla sua natura dipendere gli ostacoli che si incontrano nella idrogenazione dell'indolo, alla quale rivolgeremo ulteriormente la nostra attenzione.

Queste esperienze furono eseguite col concorso del laureando sig. Tiziano Archetti.

Chimica. — *Azione del cloroformio sull'* α-β-*N trimetilindolo.* Nota di G. Plancher ed O. Carrasco, presentata dal Socio G. Ciamician.

Chimica. — *Trasformazioni dei nitrosopirroli.* Nota di Francesco Angelico, presentata dal Corrispondente A. Angeli.

Zoologia. — *Di un nuovo protozoo.* Nota della dott. Anna Foà, presentata dal Socio B. Grassi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Di alcuni caratteri colturali della Stictis Panizzei De Not.* Nota di L. Petri, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Questo piccolo discomicete, la cui vita parassitaria sulle foglie dell'olivo dà origine nel Leccese alla malattia denominata *Brusca*, fu già coltivato sopra substrati artificiali dal prof. Brizi [1], il quale però non ottenne che uno sviluppo più o meno abbondante di un micelio sterile.

Ripresi attualmente i tentativi di coltura, credo utile riportare qui sotto i primi risultati ottenuti.

Per germinazione delle ascopore della *Stictis Panizzei* deriva un micelio che generalmente sui terreni contenenti glucosio e in particolare sul-

[1] Sulla malattia degli olivi denominata *Brusca* (Boll. Uff. Min. Agr. 1903).

l'agar preparata col decotto di foglie d'olivo addizionato di glucosio all' 1% forma dopo 8-12 giorni (temp. media 18°) una fruttificazione picnidica.

Quasi tutto il micelio viene a costituire un corpo stromatico emisferico a superficie bianca, d'aspetto pruinoso, poi di colore giallo-zolfo, cosparso di abbondanti goccie del liquido di traspirazione. I picnidi si formano dapprima nello strato periferico dello stroma, più tardi anche più profondamente.

Le spore quasi cilindriche, bacillari, ialine, incostantemente un po' incurvate si formano sopra sporofori semplici o raramente ramificati; esse misurano μ 3-4 = 0,5-0,8.

Questa fruttificazione picnidica può essere inclusa nel gen. *Cytospora* Ehrenb. ma la sua identità con una delle forme note è per ora molto incerta, è probabile però che un simile stadio metagenetico del fungo si verifichi normalmente in natura, anzi sia la forma di diffusione più attiva rappresentando l'ascospora il periodo ibernante.

Ho ottenuto dopo poco più di un mese la fruttificazione ascofora coltivando la *Stictis* sopra agar preparata al decotto di foglie di olivo senza aggiunta di ghicosio.

Gli apoteci in queste colture non sono preceduti dalla forma picnidica, la quale invece si mostra costantemente e assai presto nei terreni ricchi di ghicosio.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della perdita del Socio nazionale prof. Federico Delpino, mancato ai vivi il 14 maggio 1905. Apparteneva il defunto all'Accademia, per la Botanica, sino dall'11 luglio 1900.

La Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, accogliendo la domanda fatta dal Socio Borzì e dal Corrispondente Saccardo, approva il passaggio di ambedue dalla Sezione di *Agronomia* a quella di *Botanica*.

E la stessa Classe decide, su proposta della Sezione di *Fisica*, di dare temporaneamente il posto di Socio nazionale ora vacante nella Sezione anzidetta, e che ebbe in via provvisoria dalla Sezione di Cristallografia e Mineralogia, alla Sezione di *Chimica*.

Finalmente l'Accademia procede, a termini dello Statuto, alla rinnovazione delle cariche di Amministratore e di Amministratore aggiunto.

Il Presidente comunica all'Accademia che il Socio Volterra, fin qui Amministratore, domanda con insistenza di essere esonerato, per ragioni di salute, dalla sua carica.

Il risultato della votazione è il seguente:

Per Amministratore: Votanti 39. Gatti voti 39. Eletto Gatti. Per Amministratore aggiunto: Votanti 39. Dalla Vedova voti 38. Bodio 1. Eletto Dalla Vedova.

Su proposta del Presidente Blaserna, l'Accademia approva unanime un voto di plauso e di ringraziamento all'Amministratore uscente prof. Volterra, per l'opera attiva ed efficace da lui prestata in vantaggio dell'Accademia durante la sua amministrazione.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio G. Dalla Vedova, a nome anche del Socio G. Schiaparelli, relatore, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione negli Atti accademici della Memoria del dott. Roberto Almagià, avente per titolo: *La dottrina delle maree nell'antichità classica e nel Medio Evo.*

Il Socio G. Strüver, relatore, a nome anche del Socio L. Balbiano, legge una Relazione sulla Memoria del dott. Ferruccio Zambonini, intitolata: *Ricerche su alcune zeoliti*, concludendo col proporre la inserzione del lavoro negli Atti Accademici.

Le conclusioni delle due Commissioni esaminatrici, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona: l'Accademia delle scienze di Nuova York; la Società Reale di Londra; la R. Società delle scienze di Upsala; la Società geologica di Sydney; la Società zoologica di Tokyo; i Musei di storia naturale di Amburgo e di Nuova York; il Museo di scienze ed arti dell'Università di Filadelfia; l'Osservatorio di San Fernando.

V. C.